Übung (5)

1. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem - sagen Sie zuvor, wie die Lösungsmenge aussehen sollte bzw. geometrisch zu interpretieren wäre:

$$\begin{gathered} 2x - 2y + 2u - 3v = 1 \\ -3x - 2u + v = 0 \\ 2x + 3y - u + 2v = 0 \end{gathered}$$

2. Sagen Sie wiederum geometrische Deutung und formale Struktur der Lösungsmenge voraus. Lösen Sie dann (unter Nutzung der Besonderheiten des Systems):

$$\begin{gathered} u + 2v = w \\ 2w - 3x = z \\ 2x - 3w = 1 \end{gathered}$$

3. Zwei Ebenen im E^3 sei bezüglich eines Koordinatensystems durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}z &= 1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{2}{5}y + \frac{3}{5}z &= 0 \end{aligned}$$

beschrieben. Worin schneiden sich die Ebenen?

4. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem (x, y: Unbestimmte, a äußerer Parameter)

$$\begin{gathered} ax + (1-a)y = 1 \\ (1-a)x + (2+a)y = 0 \end{gathered}$$

Achten Sie auf etwa benötigte Fallunterscheidung.

5. Schneiden Sie die Ebene E, welche durch die Gleichung $2x - 3y + 4z = 1$ gegeben ist, mit der Ebene H, welche gegeben ist durch $\vec{x}_H(\lambda, \mu) = \lambda(2, 1, 1) + \mu(-2, 2, -1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

6. Schneiden Sie die Ebene F, $\vec{y}_F(\alpha, \beta) = (1, 0, 2) + \alpha(1, 2, 2) + \beta(-1, 2, 3)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, mit der Geraden g, $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 2, 1) + \lambda(-2, 1, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Seien $\vec{x}_P = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_Q = (2, 1, 1)$, $\vec{a} = (2, -1, 3)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene, welche durch P und Q geht und parallel zu $\vec{a}$ liegt. Woran hängt es, dass mit den Daten eindeutig eine Ebene festgelegt ist?

8. Sei die Ebene E durch die Gleichung $2x - 3y + z = 1$ beschrieben. Die Ebene F entstehe aus E durch Parallelverschiebung mit $\vec{a} = (1, 2, 3)$. Geben Sie eine ähnliche Gleichung für F - was fällt auf? Geben Sie allgemein zu jeder Zahl $d \in \mathbb{R}$ einen Vektor $\vec{a}_d$ an, so dass die Ebene H_d, welche durch $2x - 3y + z = d$ beschrieben wird, aus E durch Parallelverschiebung mit $\vec{a}_d$ hervorgeht. Was ist also die geometrische Bedeutung des Vektors $(2, -3, 1)$ der Koeffizienten bei x, y, z? (Das werden wir später genauer einsehen.)

9. Ein Fluss konstanter Breite b habe parallele gerade Ufer, und das Wasser fließe darin überall gleichmäßig parallel zum Ufer mit Geschwindigkeit $\vec{v} \neq \vec{0}$. Ein Schwimmer möchte das jenseitige Ufer genau am gegenüberliegenden Punkt erreichen, also den Fluss genau senkrecht zu den Ufern passieren. Welche Eigenschaft muss sein Geschwindigkeitsvektor *relativ zum Wasser* (auch den setzen wir als konstant an) haben, damit das gelingt? Man nehme dazu an, dass der Fluss dem Schwimmer seine Stömungsgeschwindigkeit augenblicklich und stets zusätzlich zu der Geschwindigkeit des Schwimmers relativ zum Wasser mitteile. Man fasse das Problem als zweidimensionales koordinatenmäßig, indem man den Ursprung in den Startpunkt des Schwimmers setze und die Achsenrichtungen günstig wähle.

Übung (6)

1. Seien die Ebenen E und F gegeben durch $\vec{x}_E(\alpha,\beta) = (1,2,2) + \alpha(2,1,3) + \beta(-1,4,2)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\vec{x}_F(\lambda,\mu) = \lambda(1,5,5) + \mu(3,-3,1)$. $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie (nur unter Verwendung der linearen Operationen), dass diese Ebenen parallel liegen. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge der Punkte zwischen E und F, die Ebenen selbst ausgeschlossen.

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung, dass die Seitenmitten eines beliebigen nicht ausgearteten Vierecks $ABCD$, dessen Seiten sich nicht überschneiden mögen, ein Parallelogramm bilden. Gilt das auch dann, wenn etwa D nicht einmal in der von A,B,C bestimmten Ebene liegt? Hinweis: Man arbeite mit freien Kantenvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = (\vec{x}_Q - \vec{x}_P)$ usw. Denken Sie auch darüber nach, wie man die Bedingung 'nicht ausgeartet' fassen könnte.

3. In den Punkten P,Q,R mit den Ortsvektoren $\vec{x}_P = (1,2,3)$, $\vec{x}_Q = (2,3,-4)$, $\vec{x}_R = (3,-2,1)$ liegen Massen $m_P = 3$, $m_Q = 4$, $m_R = 5$. Geben Sie den Schwerpunkt des Systems dieser drei Massenpunkte an.

4. Sind die folgenden drei Vektoren im $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig? $(1,2,2,-3)$, $(2,3,4,1)$, $(2,1,2,3)$.

5. Sei $\vec{f} :\in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, und es gelte $\vec{f}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{f}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie einen Vektor $\neq \vec{0}$ an, der durch $\vec{f}$ auf $\vec{0}$ abgebildet wird. Geben Sie auch die Matrix für $\vec{f}$ an. Hinweis: Ermitteln Sie $\vec{f}(\vec{e}_1)$ und $\vec{f}(\vec{e}_2)$.

6. Berechnen Sie für folgende Matrizen und Vektoren jeweils „Matrix mal Vektor", so weit das definiert ist:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = (3).$$

   Geben Sie einen Vektor $\vec{b}$ an, so dass $A\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar ist.

7. Seien A, B, C die Matrizen der vorigen Aufgabe. Was können Sie *ohne Rechnung* über die Lösungsmengen von $A\vec{x} = \vec{0}$, $B\vec{y} = \vec{0}$, $C\vec{z} = 0$ sagen? (Unbestimmter Vektor und Nullvektor jeweils passender Länge natürlich.) Rechnen Sie sie nunmehr auch aus. Was können Sie *ohne Rechnung* über die Lösungsmengen beliebiger inhomogener Systeme $A\vec{x} = \vec{b}$, $B\vec{y} = \vec{c}$, $C\vec{z} = \vec{d}$ sagen?

8. Wie sieht die Matrix für die Spiegelung an der $yz-$ Ebene (im $\mathbb{R}^3$) aus? Welche $(3\times 3)-$ Matrix vertauscht die Komponenten eines Eingabevektors so, dass die erste Komponente an die letzte Stelle rückt, die zweite Komponente an die erste Stelle?

Übung (7)

Alle im Zusammenhang von Längen und Winkeln betrachteten Koordinatensysteme sind als kartesische vorauszusetzen!

1. Betrachten Sie folgende Abbildung: $\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 3x-2y+z \\ -2x+y-4z \end{pmatrix}$. Ist sie linear? Wenn ja, so geben Sie die Matrix A an, so dass $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$ wird. Was entsteht, wenn man A auf die Menge aller $\vec{x}_g(\lambda) = \lambda(1,2,-3)$? Geben Sie eine Parameterdarstellung für dies Gebilde. Was ist das geometrisch?
2. Geben Sie die Matrix für die Drehung um den Ursprung mit Winkel 30 Grad im Uhrzeigersinn in der Ebene. Hinweis: $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, den Cosinuswert können Sie nun leicht exakt feststellen.
3. Geben Sie die Matrix für die Spiegelung am Ursprung im $\mathbb{R}^3$.
4. Warum ist die Spiegelung an der Ebene $z = 5$ im $\mathbb{R}^3$ keine lineare Abbildung? Welchen einfachen Rechenausdruck können Sie aber für diese Abbildung angeben?
5. Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{a} = (4,2,-1)$. Wie berechnen Sie *praktisch* die Länge von $(4,12,8)$?
6. Begründen Sie, dass $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = 1$, für jeden Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$.
7. Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren $\vec{a} = (2,3,-1)$ und $\vec{b} = (2,-2,3)$ ein? Nutzen Sie das Resultat - genauer den Sinus des Winkels, um den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms zu berechnen.
8. Sei $\vec{a} = (1,2,3)$. Ist die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto \vec{x}\vec{a}$ eine lineare Abbildung? Wie sieht die Matrix aus? Welche geometrische Deutung hat der Kern dieser Abbildung?
9. (a) Multiplizieren Sie aus: $(2\vec{x} - 3\vec{y})^2$.
   (b) Vereinfachen Sie: $2\left(\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}\vec{c}\right) + 2\vec{a}\left(\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c}\right)$
10. Warum ist $3\vec{x} + \vec{x}\vec{y}$ kein sinnvoller Ausdruck der Vektorrechnung?
11. Wie können Sie den Ausdruck $\left|\frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}\right|$ vereinfachen? Warum kann es keinesfalls sein, dass da $\left|\vec{b}\right|$ herauskommt?

Übung (8)

1. Seien $\vec{x}_P = (1,2,3)$, $\vec{x}_Q = (4,1,-5)$. Was ist der Abstand zwischen P und Q?

2. Welchen Winkel bildet die Gerade g, $\vec{x}_g(\lambda) = (1,2,2) + \lambda(2,-1,3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit der $xy-$ Ebene? (Hinweis: suchen Sie einen geeigneten Vektor, dessen Winkel zu g zur Antwort führt).

3. Geben Sie für das Dreieck PQR eine Parameterdarstellung für die Höhe durch den Punkt P. Betrachten Sie diese Höhe als Strecke. Liegt der Höhenfußpunkt auf der P gegenüberliegenden Seite des Dreiecks? Welchen Abstand hat also P von der Geraden durch Q und R?

4. Die Ebene E sei gegeben durch die Gleichung $2x - y + 3z = 1$.

   (a) Wie lauten die Achsenabschnitte dieser Ebene?

   (b) Geben Sie einen Vektor $\neq \vec{0}$ an, der senkrecht auf E steht.

   (c) Welchen Abstand hat E vom Ursprung?

   (d) Welchen Abstand hat E vom Punkt P, $\vec{x}_P = (2,3,4)$?

   (e) Welchen Abstand hat E von der Ebene F, die durch $-4x + 2y - 6z = 10$ beschrieben ist?

   (f) Welchen Winkel bildet E mit der $xy-$ Ebene?

   (g) Wie kann man von einer Geraden g mit Parameterdarstellung $\vec{x}_g(\lambda) = \vec{x}_Q + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit beliebigem Orts- und Richtungsvektor, feststellen, ob g auf E liegt?

5. Zeigen Sie, dass ein Parallelogramm genau dann ein Rechteck ist, wenn die Diagonalen gleich lang sind. Hinweis: Beschreiben Sie ein beliebiges Parallelogramm durch zwei freie Kantenvektoren $\vec{a}, \vec{b}$, deren Repräsentanten Sie von einem Eckpunkt ausgehen lassen.

6. Ermitteln Sie anhand einer Skizze, welche Ungleichung zwischen $||\vec{x}| - |\vec{y}||$ und $|\vec{x} - \vec{y}|$ gelten sollte. Versuchen sie diese Ungleichung auch zu beweisen. Hinweis: Denken Sie an die Dreiecksungleichung und an die Tatsache, dass $|s| \leq a$ für reelle Zahlen s und a dasselbe bedeutet wie $s \leq a$ *und* $-s \leq a$.

7. Wenn noch Zeit ist: Sei eine Ebene E beschrieben durch $\vec{x}\vec{n} = d$. Geben Sie eine Formel an, mittels deren man zu beliebigem Punkt (a,b,c) das Resultat von dessen Spiegelung an E berechnen kann.

Aufgaben zum Wochenende (2)

Alle Koordinatensysteme seien kartesisch.

1. Berechnen Sie zu $\vec{a} = (1, 2, -2)$ und $\vec{b} = (2, 3, -1) : 2\vec{a} - \vec{b}$, $|-3\vec{a}|$, $3\vec{a} \times ((-4)\vec{b} + \vec{a})$, $2\vec{a}\left(-3\vec{b}\right)$.

2. Berechnen Sie mittels des Vektorproduktes den Flächeninhalt des Dreiecks PQR, $\vec{x}_P = (2, 3, 4)$, $\vec{x}_Q = (3, -1, 2)$, $\vec{x}_R = (3, 1, 1)$.

3. Die Gerade g stehe senkrecht auf der durch $x - 2y + 2z = 1$ beschriebenen Ebene und gehe durch den Punkt P, $\vec{x}_P = (1, 2, -3)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für g.

4. Geben Sie eine Normalenform für die mittelsenkrechte Ebene durch die Strecke von P nach Q, $\vec{x}_P = (1, 2, -1)$, $\vec{x}_Q = (3, -2, 1)$.

5. Geben Sie zur Ebene $\vec{x}_E = (1, 2, 2) + \lambda(2, 1, -1) + \mu(2, -3, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, eine Normalenform. Bestimmen Sie anschließend den Winkel zwischen E und der $xy-$ Ebene sowie zwischen E und der Geraden g, $\vec{x}_g(\lambda) = \lambda(2, 3, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie auch den Abstand zwischen E und dem Punkt P, $\vec{x}_P = (3, 4, 3)$. Spiegeln Sie E an der durch P gehenden parallelen Ebene. (Achten Sie darauf, was man als Resultat zur letzten Frage angeben sollte!)

6. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge aller Punkte, die von den durch folgende Ortsvektoren gegebenen Punkten gleich weit entfernt sind: $\vec{x}_P = (1, 2, -1)$, $\vec{x}_Q = (3, -2, 1)$, $\vec{x}_R = (1, 2, 2)$.

7. Sei $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 1, 4)$. Wieso ist die Abbildung $\vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$ linear? Geben Sie die Matrix dazu. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$. Überlegen Sie das auch geometrisch. Bringen Sie das Resultat in angemessene Form.

8. Im Punkt $(0, 0, h)$, $h > 0$, befindet sich eine punktförmige Lichtquelle. Ein Stab der Höhe r, $0 < r < h$, bewegt sich mit seinem Fußpunkt in der $xy-$ Ebene auf der Geraden g, $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 0, 0) + \lambda(2, 3, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Wie sieht die Bahn des Schattenpunktes vom höchsten Punkt des Stabes (über der $xy-$ Ebene) aus?

9. Ein Lichtstrahl fällt entlang der Geraden $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 2, 3) + \lambda(2, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, auf die $xy-$ Ebene und wird dort reflektiert. Beschreiben Sie mit einer Parameterdarstellung die Bahn des ausfallenden Strahls.

10. Eine Leiter der Länge l steht an eine Wand gelehnt, im Winkel α zum Boden, auf der die Wand senkrecht steht. Auf der Leiter an beliebiger Stelle steht jemand. Es wirkt nur die Gravitationskraft $(0, -mg)$. Die Leiter verhalte sich (idealisierend) vollkommen starr. (Man stelle das Problem zweidimensional dar.) Welche Seitenkraft muss die Wand aushalten? Es werde angenommen, dass die Leiter nicht wegrutsche, die kompensierende Reibungskraft also groß genug sei. Man mache insbesondere die Abhängigkeit des Resultates von α und der Leiterposition klar.