Übung (1)

1. Vereinfachen Sie folgende Rechenausdrücke:

$$\frac{a^3b^4}{a^5b^2},\ \frac{\frac{x^{-3}y^5}{a^3b^4}}{\frac{x^2y^6}{a^7b^3}} = \text{? (Hauptbruchstrich!)},\ \frac{a^3b^4}{x^2y^2z}+\frac{a^4b^5}{x^3y^3u}-\frac{a^5b^3}{x^3y^4v}\ \text{(Ausklammern!)},$$

$$\sqrt[3]{64},\ 128^{-1/4},\ \sqrt{32}.$$

2. Was ist der Unterschied zwischen $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ und $\frac{2^3}{3}$?

3. Warum gilt $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$? Sprechen Sie genau aus, welche gültige Umformung hier vorliegt. Führen Sie eine solche Umformung mit $\frac{1}{1-3\sqrt{x}}$ derart durch, dass keine Wurzel mehr im Nenner steht.

4. In welche Endform sollte man folgende (Bestimmungs-) Gleichung (mit x, y als Unbestimmten) bringen? (Tun Sie das *im Kopf!)*

$$2(y-x)+5(3-2y)+4 = 5+3x$$

Skizzieren Sie die Lösungsmenge. Geben Sie auch die zugehörige Achsenabschnittsform, und lesen Sie die Achsenabschnitte daraus ab.

5. Wie die vorige Aufgabe, mit der Gleichung (darin sei nur x Unbestimmte, a äußerer Parameter) $a\left(x^2-2+x\right)-(1-a)\,x = 5\left(x-2x^2\right)$. Geben Sie allgemein für a die Lösungsmenge an.

6. Bringen Sie die Parabelgleichung $y = -2x^2+5x+4$ in Scheitelpunktsform, lesen Sie daraus auch die Koordinaten des Scheitelpunktes wirklich ab.

7. Begründen Sie sorgfältig (Bruchrechnen und Anwendung binomischer Formel!), dass stets gilt:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y) \geq 2,\ \text{wenn}, y > 0.$$

Überlegen Sie auch, wie die Sache bei anderen Vorzeichen von x, y aussieht.

8. Es gilt folgende Formel (sie ist ein Spezialfall des 'Additionstheorems' für Tangens):

$$\tan(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

sofern $\tan(\alpha)$ definiert ist. Sehen Sie nach, für welche Fälle der Ausdruck auf der rechten Seite nicht definiert ist. Sei nun α ein Winkel zwischen Null und unter 90 Grad. Benutzen Sie die Formel, um $\tan(\alpha/2)$ aus $\tan(\alpha)$ zu errechnen. Benutzen Sie dabei auch die Tatsache, dass der Tangenswert ≥ 0 wird für alle Winkel zwischen Null und unter 90 Grad, um ein eindeutiges Resultat zu erhalten. Testen Sie Ihr Rechenergebnis, indem Sie nachprüfen, dass für $\alpha = \pi/4$ (oder 45 Grad) genau $\tan(\pi/8) = \sqrt{2}-1$ herauskommt. ($\pi/8$ entspricht 22.5 Grad.) Gilt Ihre Formel auch für negative Werte α, deren Betrag $< \pi/2$ (oder 90 Grad) liegt? (Denken Sie an die Tatsache, dass $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$. Nutzen Sie nunmehr das Resultat für folgende Aufgabe: Ein Dreieck hat die zwei Eckpunkte $(-1,0)$ sowie $(1,0)$. Der dritte Eckpunkt habe die Koordinatendarstellung $(0,a)$, $a > 0$. Zu diesem Dreieck ist der Mittelpunkt des Inkreises (d.h. der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden) gesucht. Hinweis: Denken Sie an die Tatsache, dass für eine Gerade der Form $y = mx+b$ gilt: m ist der Tangens des Winkels der Geraden zur $x-$ Achse - auch für negative Werte von m, wenn man den Winkel entsprechend misst.

Übung (2)

1. Welche der folgenden Gleichungen ist linear / quadratisch / Polynomgleichung / nichts davon in x? Lösen Sie die betreffenden Gleichungen im linearen und im quadratischen Fall.

$$\begin{aligned} a^2(1-x)^5 &= x^3 \sin a, \\ \sin\left(x^2-1\right) &= x \\ x\sin a - 2 &= (3-x)\cos a \\ b^3(x-a)^2 &= x \end{aligned}$$

   Ist letztere Gleichung als quadratische Gleichung für die neue Unbestimmte $y = x - a$ aufzufassen? Kann man sie durch Einführung dieser neuen Unbestimmten bequemer lösen?

2. c_1, c_2, c_3 mögen Zahlwerte > 0 haben. Um wieviel Prozent und in welcher Richtung verändert sich der Wert von $\frac{c_1^3 \cdot c_2^2}{c_3^4}$, wenn man den Wert von c_1 um 3% erhöht, den von c_2 um 2% senkt und den von c_3 um 4% senkt? Ist die Antwort unabhängig von den Ausgangswerten? Kann man das Resultat im Kopf grob überschlagen?

3. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 &= 1 \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

   Deuten Sie die Aufgabe und ihre Lösung geometrisch.

4. Wie viele Summanden ergeben sich, wenn man das Produkt $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right)$ ausdistribuiert? Schreiben Sie das Produkt auch mit großem Summenzeichen. Konkretisieren Sie das Ganze mit $n = 3$, $m = 2$. (Schreiben Sie für diesen Fall alle Summen aus.)

5. Schreiben Sie folgende Summen aus (jeweils wörtlich so, wie sie stehen!):

$$\sum_{i=1}^{4} 2, \quad \sum_{i=1}^{3}\left(i+i^2\right), \quad \sum_{i=1}^{3} i + \sum_{i=1}^{3} i^2, \quad \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2}(i+3j)\right), \quad \sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{3}(i+3j)\right),$$

   und sehen Sie ein, dass und warum die ersten beiden und die letzten beiden jeweils denselben Wert ergeben. Dasselbe für die Summe $\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} x^k$.

6. Schreiben Sie folgende Summe mittels des großen Summenzeichens:

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{8} + \frac{x^8}{10} - \frac{x^{10}}{12}$$

7. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Leute aus 10 Leuten auszuwählen? (Kürzen Sie den entstehenden Bruch so, dass Sie das Resultat im Kopf errechnen können.)

8. Wie viele Summanden hat $(a+b+c)^4$ nach sturem Ausdistribuieren 'jeder mit jedem'? Schreiben Sie nunmehr auf, was $((a+b)+c)^4$ nach der binomischen Formel ergibt. Nunmehr stellen Sie den Ausdruck $(a+b+c)^4$ in der folgenden Form dar:

$$\begin{aligned} &\alpha\left(a^4+b^4+c^4\right) + \beta\left(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b\right) \\ &+\gamma\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right) + \delta\left(a^2bc + b^2ac + c^2ab\right). \end{aligned}$$

   Beachten Sie das Ordnungsprinzip. Lesen Sie die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus der vorigen Darstellung ab, beachten Sie dabei die Symmetrie des Ausdrucks in a, b, c. Prüfen Sie Ihr Resultat über $\alpha \cdot 3 + \beta \cdot 6 + \gamma \cdot 3 + \delta \cdot 4$ -

was muss das ergeben? Finden Sie einen Weg, diese Koeffizienten sofort vorauszusagen durch Rechnung? Hinweis: Man hat zu untersuchen, welche Anzahl von Möglichkeiten es gibt, ein Wort aus 4 Buchstaben zu bilden, in dem k_1 mal der Buchstabe $'a'$, k_2 mal der Buchstabe $'b'$ und k_3 mal der Buchstabe $'c'$ vorkommt, $k_1 + k_2 + k_3 = 4$. Nun können Sie auch z.B. vorhersagen, welcher Faktor beim Glied $a^3b^4c^5$ in $(a+b+c)^{12}$ auftritt.

9. Man kann günstig die Eigenschaften der Anordnung der reellen Zahlen vollständig so erfassen: P (zu deuten als Menge der echt positiven Zahlen) ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

   (a) Für jede reelle Zahl x gilt *genau eine* der folgenden Aussagen: $x \in P$, $-x \in P$, $x = 0$.

   (b) Wenn $x \in P$ und $y \in P$, so $x + y \in P$ und $xy \in P$, für alle reellen Zahlen x, y.

   Nunmehr definiert man für alle reellen Zahlen a, b: $a < b$ genau dann, wenn $b - a \in P$. Folgern Sie daraus:

   (i) $-1 \notin P$.

   (ii) Wenn $a > 0$, dann auch $\frac{1}{a} > 0$.

   (iii) Niemals $a < a$.

   (iv) Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$, für alle reellen Zahlen a, b, c.

Übung (3)

1. Zeigen Sie, dass $a^2 > b^2$, wenn $a > b \geq 0$. Zeigen Sie auch, dass die Aussage ohne die Bedingung $b \geq 0$ falsch werden kann. Nutzen Sie die letzte Aufgabe des vorigen Blattes.

2. Gilt stets $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \max(|a|, |b|)$? (Dabei ist $\max(|a|, |b|)$ einfach das Maximum von $|a|, |b|$.) Die umgekehrte Ungleichung gilt offenbar nicht. Formulieren Sie genau, in welchen Spezialfällen sie ausschließlich gilt, und begründen Sie das. Finden Sie aber eine besonders einfache Funktion f, so dass allgemeingültig wird: $\sqrt{a^2 + b^2} \leq f(\max(|a|, |b|))$. (Geben Sie also einen entsprechenden Rechenausdruck an.)

3. v und c mögen Werte > 0 haben, stets $v < c$. Für welche Werte von v/c wird $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \frac{1}{100}$?

4. Skizzieren die Menge aller Punkte (x, y) in der Ebene, für die gilt $|x| - |y| \geq 0$. Welche Symmetrien hat diese Menge?

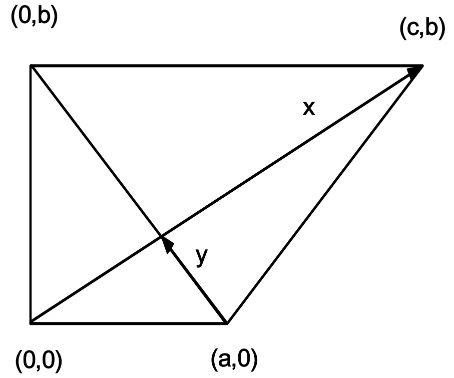
5. Beschreiben Sie in der Ebene *alle* Parabeln der Form $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, deren Achse parallel zur $y-$ Achse liegt und deren Scheitelpunkt (a, b) ist. Hinweis: Nutzen Sie Scheitelpunktsform. Wie viele freie Parameter verbleiben? Was ist deren geometrische Bedeutung? Was ist die Rolle der Buchstaben a, b in dieser Aufgabe?

6. Schreiben Sie unter Anwendung der allgemeinen binomischen Formel auf: $2^n = (1 + 1)^n = ...$ Deuten Sie die Summe kombinatorisch, und lesen Sie ein Resultat ab.

7. Sie teilen das Intervall $[a, b]$ $(a < b)$ in n gleich breite Streifen. Geben Sie eine allgemeine Formel für den $i-$ten Zwischenpunkt. Geben Sie natürlich dazu auch an, welchen Bereich i zu durchlaufen hat.

8. Teilen Sie das Quadrat aller Punkte (x, y) der Ebene mit $a \leq x \leq b$ und $c \leq y \leq d$ in ein Gitter ein aus m Streifen in Richtung der $y-$ Achse und n Streifen in Richtung der $x-$ Achse. Beschreiben Sie nun alle Gitterpunkte formelmäßig, unter Einbeziehung der Randpunkte.

9. Betrachten Sie folgende Skizze, und geben Sie die Koordinatendarstellungen für die freien Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ an. Geben Sie auch die Koordinatendarstellung des Diagonalenschnittpunktes. Wie kann man letztere unter Benutzung von $\vec{y}$ aus $(a, 0)$ erhalten?



Übung (4)

1. Zeichnen Sie in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem K den Punkt P mit $\vec{x}_P = (-1, -2, 1)$ ein, mit vollem Quader.

2. Vorausgesetzt sei ein kartesisches Koordinatensystem. Ein Würfel der Kantenlänge $2a$, $a > 0$, liege achsenparallel mit Mittelpunkt in $(2, 3, -1)$.Beschreiben Sie vektoriell - Blickrichtung der Betrachtung sei die Negativrichtung der $x-$ Achse, 'oben' sei durch die Positivrichtung der $z-$ Achse bestimmt, 'rechts' durch die Positivrichtung der $y-$ Achse. Verwenden Sie natürlich eine Skizze.

   (a) Alle Eckpunkte - warum war es zweckmäßig, die Kantenlänge $2a$ zu nennen?

   (b) die obere Würfelseitenfläche,

   (c) die vom linken vorderen oberen Eckpunkt ausgehende Raumdiagonale des Würfels,

   (d) die Diagonale auf der rechten Würfelseitenfläche, welche vom Eckpunkt oben rechts ausgeht.

   (e) Auf dem Würfel steht eine vierseitige Pyramide, deren Grundseite ein Quadrat ist der Kantenlänge $2b$, $0 < b < a$. Die Höhe der Pyramide sei $h > 0$. Beschreiben Sie vektoriell die vordere Pyramiden-Seitenfläche. Tun Sie das elementar, überlegen Sie dazu nur, welchen Wert die $x-$ Koordinate haben muss, wenn man sich auf der Höhe r (gemessen von der Grundseite der Pyramide aus) befindet, $0 \leq r \leq h$. Ferner analog: In welchem Bereich kann auf dieser Höhe noch die $y-$ Koordinate variieren? Auf diese Weise erhalten Sie zwei freie Parameter mit Begrenzungen.

3. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade durch P und Q, $\vec{x}_P = (1, -4)$, $\vec{x}_Q = (2, 3)$. Geben Sie diese Gerade auch in der Gleichungsform an. Welchen Winkel bildet sie mit der $x-$ Achse?

4. Welches Gebilde wird durch folgende Parameterdarstellung beschrieben? $\vec{x}(t) = (t^2, t)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. (Kartesisches System.) Welche Symmetrie hat das Gebilde? Warum ist das kein Funktionsgraph mit der ersten Komponente als unabhängiger Variablen?

5. Welches geometrische Gebilde im $\mathbb{R}^3$ wird durch die Bedingung beschrieben, dass $x^2 + y^2 \leq 1$ *und* $-1 \leq z \leq 1$? (Kartesisches System.) Welches Volumen hat das Gebilde? Überlegen Sie weiter geometrisch-intuitiv, was sich ergibt, wenn man zusätzlich die Bedingung $y = z$ stellt - was für ein Gebilde im $\mathbb{R}^3$ wird mit letzterer Bedingung allein beschrieben?

6. Beschreiben Sie in einem zweidimensionalen kartesischen System alle gleichschenkligen Dreiecke, deren in der Länge frei wählbare Seite auf der $x-$ Achse liegt, mit dem einen Eckpunkt im Ursprung, dem andern im positiven Bereich der $x-$ Achse. Der dritte Punkt soll positive $y-$ Koordinate haben. Wie viele freie Parameter haben Sie?

7. Setzen Sie ein kartesisches System voraus. Beschreiben Sie in Gleichungsform und in Parameterform die Ellipse in der Ebene, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen, mit kleiner Halbachse der Länge 2 in $x-$ Richtung, großer der Länge 4 in $y-$ Richtung. Verschieben Sie nun diese Ellipse parallel, so dass der Mittelpunkt in $(2, 3)$ landet. Geben Sie für diese Ellipse nunmehr die Beschreibungen in Gleichungs- und in Parameterform. Achten Sie auf einen charakteristischen Unterschied bei den anzubringenden Veränderungen.

Aufgaben zum Wochenende (1)

1. Lösen Sie allgemein die Gleichung (x Unbestimmte, a äußerer Parameter) $3x^2 + 2ax - 3 = 0$. Lösen Sie ferner $\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{2x}} = 1$.

2. Schreiben Sie auf, was bei $(a-b)^6$ nach distributivem Ausrechnen herauskommt, indem Sie die Binomialkoeffizienten nutzen.

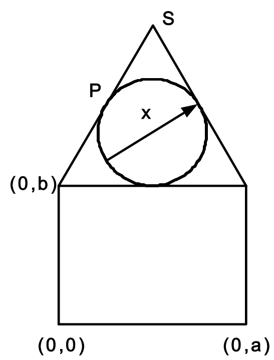
3. Seien $\vec{x}_P = (2,1,-3)$, $\vec{x}_Q = (1,3,2)$.

   (a) Der Punkt R werde dadurch erreicht, dass man von P nach Q geht und dann in derselben Richtung noch einmal so weit. Geben Sie die Koordinatendarstellung für R.

   (b) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, die parallel zu der Geraden durch P und Q verläuft und auf der S liegt, $\vec{x}_S = (3,5,-2)$.

   (c) Geben Sie *alle* Parameterdarstellungen für die Gerade durch P und Q, bei denen die Strecke $\overline{PQ}$ in einer Zeiteinheit durchlaufen wird (bei Deutung des freien Parameters als Zeit). Und nunmehr lassen Sie die Gerade doppelt so schnell durchlaufen. Wie wird die Gerade durchlaufen mit folgender Parametrisierung? $\vec{x}(t) = \vec{x}_P + t^3 (\vec{x}_Q - \vec{x}_P)$, $t \in \mathbb{R}$. Deuten Sie wiederum t als Zeit. Wieso wird dieselbe Punktmenge durchlaufen wie zuvor?

4. Betrachten Sie folgende Skizze (das Koordinatensystem ist kartesisch, das obere Dreieck ist gleichseitig, und der Kreis ist der Inkreis dieses Dreiecks, der Vektor $\vec{x}$ zeigt in Richtung der Winkelhalbierenden und hat genau die Länge des Kreisdurchmessers): Geben Sie die Koordinatendarstellungen für S und P sowie für den freien Vektor $\vec{x}$. Geben Sie auch eine Parametrisierung des Kreises.



5. Welches Gebilde in der Ebene wird (System kartesisch) mit $|x| + |y| \leq 1$ beschrieben?

6. Entscheiden Sie bei folgenden Darstellungen von Punktmengen, ob es sich um Darstellung durch Parametrisierung oder um Darstellung durch Gleichung(ssystem) handelt, entscheiden Sie weiter, welche Dimension das beschriebene Gebilde hat und ob es sich jeweils um ein lineares ('gerades') oder nichtlineares ('krummes') Gebilde handelt. Skizzieren Sie alle Gebilde von a bis g.

   a. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda) = (\lambda, 1+|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \lambda \leq 1$. b. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda) = (3+3\lambda, 2-5\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. c. Im $\mathbb{R}^2$: $2x^3 = y^2$. d. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda,\mu) = (1,2) + \lambda(4,-2)$, $0 \leq \lambda \leq 1$. e. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda,\mu) = \lambda(2,1) + \mu(3,4)$, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$. f. Im $\mathbb{R}^3$: $z = x - 2y$ *und* $x \leq 2z + 2y$. (Vereinfachen Sie die Bedingung, dann finden Sie auch leicht heraus, wie das Gebilde aussieht.) g. Im $\mathbb{R}^3$: $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ *und* $1 \leq z \leq 3$. h. Im $\mathbb{R}^3$: $\vec{x}(\lambda,\mu) = (2\lambda - 3\mu + 1, 2\lambda + 3\mu - 1, \lambda + \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.