Übungen über die Weihnachtsferien

Erster Block: Einige Standardaufgaben

1. Sie haben folgende Werte für die bis zum Examen benötigten Semesterzahlen einer Studentenpopulation gefunden: 8, 9, 10, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 18, 18. Geben Sie ein 95%-Vertrauensintervall für den Populationsmittelwert anhand dieser Daten.
2. Seien X, Y unabhängige Variablen. Sie wollen über eine $X-$ Stichprobe und eine $Y-$ Stichprobe je vom Umfang n, über einen zu beobachtenden Wert von $\overline{X} - \overline{Y}$ die Mittelwertdifferenz $\mu(X) - \mu(Y)$ schätzen. Weiter können Sie abschätzen: $\sigma(X) \leq 30$, $\sigma(Y) \leq 20$. Wie groß sollten Sie n wählen, damit Sie die Mittelwertdifferenz $\mu(X) - \mu(Y)$ mit mindestens 99% Sicherheit auf 1 genau schätzen?
3. Es geht um eine unbekannte relative Häufigkeit p in einer Population. Auf welchem Niveau können Sie mit einer beobachteten relativen Häufigkeit von 0.3, die Sie in einer Zufallsstichprobe vom Umfang 230 beobachtet haben, die Hypothese '$p \geq 0.35$' verwerfen? Welche positive Aussage können Sie also mit welcher Sicherheit treffen?
4. Wie groß ist die Mittelwertdifferenz $\mu(X_A) - \mu(X_B)$ mit 99% Sicherheit *mindestens*, wenn Sie in einer Stichprobe zu X_A vom Umfang 120 und einer Stichprobe zu X_B vom Umfang 140 (unabhängige Stichproben!) beobachtet haben: $\overline{x}_A = 130$, $\overline{x}_B = 100$, $s(X_A) = 30$, $s(X_B) = 20$? Formulieren Sie das Resultat auch in der Form, welche Hypothese auf welchem Niveau zu verwerfen ist.
5. Skizzieren Sie (nachdem Sie eine geeignete Wertetabelle hergestellt haben) den Graphen der Verteilungsfunktion der $\left(5, \frac{1}{4}\right) -$ Binomialverteilung.
6. Sei X eine $p-$ Bernoulli-verteilte Variable. Wie lautet $\mu\left(X^2\right)$? (Nutzen Sie eine Formel und bekannte Resultate.) Welchen Erwartungswert hat das Produkt zweier unabhängiger $p-$ Bernoulli-Variablen? (Erinnerung: $p-$ Bernoulli-Variablen sind solche mit nur den Werten 1,0, wobei der Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit p angenommen wird. Hinweis zur zweiten Frage: Nutzen Sie auch dafür eine Formel, rechnen Sie die Sache also nicht 'zu Fuß' aus.)
7. Geben Sie ein Beispiel für ein Paar abhängiger Zufallsvariablen, und begründen Sie verbal die Abhängigkeit.
8. Angesichts folgender Daten - denken Sie an ein Hochschulsystem mit Zulassung durch die Fachbereiche -

	angenommene Bewerber		abgelehnte Bewerber	
	weiblich	männlich	weiblich	männlich
Fachgruppe I	1400	13000	1500	14000
Fachgruppe II	3000	200	30000	3000
Fachgruppe III	200	20000	10	200

kommt jemand zur Interpretation, hier seien die Frauen benachteiligt worden. Wie argumentieren Sie zur Sache?

9. Berechnen Sie folgende Ableitungen:

$$\text{(a)} \ \frac{d}{dt} e^{\pi x t},$$
$$\text{(b)} \ \frac{d}{dx} \frac{\sqrt[2]{x^3}}{\ln(2)},$$
$$\text{(c)} \ \frac{d}{dx} e^{1-x^3},$$

   diskutieren Sie im Falle (c) auch die zugehörige Funktion $x \mapsto e^{1-x^3}$ in deren maximalem reellen Definitionsbereich.
10. Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen (jeweils im maximalen reellen Definitionsbereich, den Sie dazu angeben sollten, stellen Sie jeweils ausdrücklich fest, wenn eine Standardsymmetrie besteht), und klären Sie auch jeweils *quantitativ* die Extremwertfrage:
    (a) $f(x) = -\ln|x|,$
    (b) $g(x) = \frac{x^3}{1-x^2},$
    (c) $h(x) = x\sqrt{1-x^2}.$
11. Berechnen Sie $\int \ln(2x-3)\, dx$, nutzen Sie dafür folgende Stammfunktion für ln als bekannt: $\int \ln(x)\, dx = x \ln x - x \ (+c)$.

Zweiter Block: Etwas schwierigere Aufgaben

1. Seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $P(B) \neq 0$ und $P\left(\overline{B}\right) \neq 0$. Zeigen Sie: A, B sind genau dann unabhängig, wenn $P(A|\, B) = P\left(A|\, \overline{B}\right)$.
2. In einer Urne sind 30 Kugeln, davon 10 rot, 15 blau und 5 gelb. Sie ziehen 10 Kugeln *ohne Zurücklegen* heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Sie 4 rote, 5 blaue und eine gelbe dabei? - Und nun dasselbe Problem mit der Bedingung, dass *mit Zurücklegen* gezogen werde. Hinweis: Stellen Sie das Ereignis als 'und'-Verbindung dar, und verwenden Sie die Formel $P(A \cap B) = P(A|\, B)\, P(B)$. Stellen Sie nunmehr fest, dass Sie beide Faktoren auf der rechten Seite mittels der Ihnen bekannten Fälle von nur zwei Klassen ('Treffer' und 'Niete') berechnen können. Versuchen Sie die Verallgemeinerungen aber auch sinngemäß direkt anzugehen, d.h. von den Grundüberlegungen aus, die wir für den Fall von nur zwei Klassen anstellten. (Vielleicht empfinden Sie das sogar als einfacher.) Formulieren Sie auch die völlige Verallgemeinerung Ihrer Resultate.
3. Können Sie eine Verteilung mit einer Dichte angeben, bei welcher der Mittelwert μ noch existiert, die Varianz aber nicht mehr (d.h. sie wird unendlich)?
4. Berechnen Sie allgemein zu den Dichten

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \beta(\alpha)\, x^\alpha, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}, \ \alpha > 0,$$

   den Mittelwert $\mu(\alpha)$ und die Streuung $\sigma(\alpha)$. (Welche Rollen haben α und x?) Berechnen Sie zuvor allgemein $\beta(\alpha)$ - das ist eine jeweils von α abhängige Konstante, so dass f_α tatsächlich zu einer Wahrscheinlichkeitsdichte wird - Bedingung: Der Gesamtflächeninhalt unter dem Graphen muss den Wert 1 ergeben. Skizzieren Sie grob qualitativ die Graphen der Funktionen $\alpha \mapsto \mu(\alpha)$ und $\alpha \mapsto \sigma(\alpha)$.

5. Berechnen Sie $\frac{d}{dx}\frac{x}{1-\alpha x^2}$, diskutieren Sie auch die zugehörigen Funktion $f_\alpha(x) = \frac{x}{1-\alpha x^2}$ im jeweils maximalen reellen Definitionsbereich. Lösen Sie auch *allgemein* für $\alpha \in \mathbb{R}$ *quantitativ* die zugehörige Extremwertfrage. Skizzieren Sie auch grob die Schar der Graphen, wobei es genügt, jeweils 3 Typen zu unterscheiden und anzudeuten, was in den betreffenden Parameterbereichen passiert, wenn Sie α vergrößern oder verkleinern.
6. Die Variable X sei gleichverteilt auf $[3;5]$. Welchen Erwartungswert haben Sie für die Variable $\left(\frac{1}{2}X - 1\right)^{30}$?
7. Eine Variable X sei $\log -$ normalverteilt, d.h. sie nimmt nur Werte > 0 an, und die Variable $\ln(X)$ ist normalverteilt, sagen wir mit Mittelwert μ und Streuung σ. Geben Sie Dichte- und Verteilungsfunktion für X an.
8. Sei die Variable X gleichverteilt auf $]0,1]$ - die Dichte hat also dort konstant den Wert 1, außerhalb des Intervalls den Wert 0. Sei Y die Variable $\ln(X)$ - in korrekter Notation müsste es heißen: $Y = \ln \circ X$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von Y und anschließend die Dichte von Y, und erklären Sie daraus, dass die früher benutzten Logarithmentafeln ungleichmäßig abgenutzt wurden.