Übung (7)

1. Man hat ein Zufallsexperiment mit Ausgängen ω_i, $i = 1, ..., n$, welche die Wahrscheinlichkeiten $p_i \neq 0$ haben, d.h. $P(\{\omega_i\}) = p_i$, $i = 1, ..., n$. Wenn man in diesem Rahmen das Ereignis $A \subseteq \Omega$ erfährt, $P(A) \neq 0$, so misst man diese Information durch $I(A) = -\log_2(P(A))$. Unter der Entropie der angegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung f versteht man den Erwartungswert von I, also $H(f) = \sum_{i=1}^{n} -\log_2(P(\{\omega_i\}))P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} -\log_2(p_i)p_i$.
   (a) Rechnen Sie nach, dass für $P(A) = \frac{1}{2}$ gilt: $I(A) = 1$. (Das ist übrigens die Bedeutung von '1 Bit'.)
   (b) Zeigen Sie: Erfährt man das Ereignis $A \cap B$ mit zwei *unabhängigen* Ereignissen A, B, so ist der Infomationswert insgesamt $I(A \cap B) = I(A) + I(B)$.
   (c) Begründen Sie: Je unwahrscheinlicher ein Ereignis ist, das man erfährt, desto größer ist der Informationswert. Insbesondere hat das Ereignis Ω den Informationswert 0.
   (d) Berechnen Sie H für folgende beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen: 1.: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $P(\{\omega_i\}) = 1/3$, $i = 1, 2, 3$. 2.: Ω ebenso, aber $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 1/4$, $P(\{\omega_3\}) = 1/2$. Sprechen Sie eine allgemeine Vermutung darüber aus, unter welchen Umständen die Entropie kleiner / größer wird.
   (e) Behandeln Sie als Extremwertaufgabe die Frage, für welche Wahrscheinlichkeitsverteilung bei nur zwei Elementarereignissen die Entropie maximal wird.
2. Jemand testet anhand einer Stichprobe vom Umfang 100 die Hypothese '$\mu(X) \leq c$' auf 1%− Niveau. Tatsächlich sei $\mu(X) = c + 5$. Weiter sei $\sigma(X) = 30$. Wir nehmen noch vereinfachend an, dass vom Testenden auch $s(X) = 30$ gefunden werde und dass die Vertrauensgrenze mittels $t-$ Verteilung bestimmt werde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit begeht der Testende den Fehler 2. Art? Wie entwickelt sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn man das Signifikanzniveau des Tests abschwächt (also höhere Signifikanzniveaus als 0.01 wählt)?
3. Eine Population von 'Kranken' mache ein Hundertstel der Gesamtbevölkerung aus. Man verfüge über einen diagnostischen Test für die Krankheit, der mit Wahrscheinlichkeit 2/100 einen Gesunden als 'krank' klassifziert ('falsch positiver' Befund), mit derselben Wahrscheinlichkeit einen Kranken als 'gesund' ('falsch negativer' Befund). Jemand wird zufällig aus der Gesamtbevölkerung ausgewählt und bei einem solchen Test als 'krank' diagnostiziert: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Betreffende tatsächlich krank?
4. Man nutzt eine Variable X, um Individuen den beiden Klassen A, B der Gesamtpopulation $\Omega = A \cup B$ ($A \cap B = \varnothing$) (mit Unsicherheit) zuzuordnen. Es möge gelten: $P(A) = 1/3$, $X_{|A}$ sei normalverteilt mit Mittelwert 90 und Streuung 5, $X_{|B}$ sei normalverteilt mit Mittelwert 100 und Streuung 5. Man möchte nunmehr naheliegend eine Entscheidungsregel der folgenden Art verwenden: 'Entscheide auf Zugehörigkeit zu A bei einem $X-$Wert $\leq c$ und auf Zugehörigkeit zu B, wenn der $X-$ Wert über c beobachtet wird'. Wie muss man c wählen, damit bei beliebig vorgelegtem Mitglied der gesamten Population die Wahrscheinlichkeit einer Fehlklassifikation minimal wird?

Übung (8)

1. Berechnen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung des Parameters λ einer Exponentialverteilung nach unabhängig beobachteten Werten $2, 3, 5$. Können Sie das Resultat auch für den allgemeinen Fall beobachteter Werte x_i, $1 \leq i \leq n$, $x_i > 0$, allgemein ausdrücken und dies allgemeine Resultat ausrechnen?
2. Berechnen Sie folgende Integrale:
   (a) $\int_0^1 (2e^x - \sqrt[3]{x} + 1)\, dx$,
   (b) $\int \frac{1+x}{x^2} dx$,
   (c) $\int \sqrt{2x-1} dx$,
   (d) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx$,
   (e) $\int e^{-3x-2} dx$.
3. Berechnen Sie numerisch durch Einteilung des Integrationsintervalles in drei gleich breite Streifen und Nutzung der Funktionswerte an den Intervallmitten das Integral
$$\int_0^{0.3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$
Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem, was Ihre Tabelle hergibt.
4. Geben Sie zur Dichtefunktion $f(x) = \begin{cases} 4x^3 \text{ für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$ die zugehörige Verteilungsfunktion an, skizzieren Sie auch die Graphen von Dichte und Verteilungsfunktion. Sei nun X eine Variable, welche mit Dichte f verteilt ist. Berechnen Sie $P(X \geq \frac{1}{2})$. Berechnen Sie $\mu(X)$ und $\sigma(X)$.
5. Eine Variable X sei verteilt mit der Dichte $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ für } 1 \leq x \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$. Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an, und skizzieren Sie die Graphen von Dichte und Verteilungsfunktion. Was ist $P(X \geq 2)$? Auf welches Problem stoßen Sie, wenn Sie $\mu(X)$ auszurechnen versuchen? Was schließen Sie?