Übung (2)

1. Geben Sie ein weiteres Beispiel für eine Variable, deren Verteilung qualitativ dieselbe Form hat wie die der Variablen 'Geschwisterzahl' (in der Gesamtpopulation). - Geben Sie ein Beispiel für eine bimodale (d.h. zweigipflige) Verteilung.
2. Zeigen Sie: $\sigma(X) = 0$ genau dann, wenn X nur einen einzigen Wert annimmt, also konstant ist.
3. Vorbemerkung: Setzen Sie wieder voraus, dass X nur endlich viele Werte annimmt. Man definiert zu X die neue Variable $X + c$ vermöge $(X + c)(\omega) = X(\omega) + c$, die neuen Werte entstehen also durch Addition von c zu den Werten von X. Analog bildet man cX für eine Konstante c. Sie kennen nun von der Variablen X die Werte $\mu(X)$ und $\sigma(X)$. Zeigen Sie (d.h. hier: Rechnen Sie nach):
   (a) $\mu(X + 1) = \mu(X) + 1$
   (b) $\sigma(X + 1) = \sigma(X)$
   (c) $\mu(cX) = c\mu(X)$
   (d) $\sigma(cX) = |c|\,\sigma(X)$.
4. Eine Variable X nehme nur die Werte 1 und 0 an, 1 mit Wahrscheinlichkeit p, $0 < p < 1$.
   (a) Berechnen Sie (allgemein, in Abhängigkeit von p) $\mu(X)$.
   (b) Berechnen Sie die Varianz von X (ebenso allgemein).
   (c) Berechnen Sie den Wert p, für welchen die Varianz maximal wird. (Dafür genügt es, den entstehenden quadratischen Rechenausdrcuk auf Scheitelpunktsform zu bringen - Sie benötigen nicht etwa die Ableitung des Rechenausdrucks.
5. Um die Sicherheit der Fahrweise bei zwei verschiedenen Klassen A, B von Autofahrern miteinander zu vergleichen, zählen Sie Unfallhäufigkeiten pro Jahr. Was sollten Sie dabei berücksichtigen, um fairen Vergleich zu ermöglichen?
6. Betrachten Sie ein Zwei-Personen-Spiel, das so verläuft: Spieler A ist zuerst am Zug, hinterlässt eine Spielsituation, dann ist B am Zuge, hinterlässt eine neue Spielsituation, usw. Weiter setzen wir voraus, dass klar definiert ist, bei welchen Spielsituationen der Spieler, der diese gerade herbeigeführt hat, gewonnen hat. Ihre Aufgabe: Definieren Sie, was eine Gewinnstrategie für Spieler B ist. (Beachten Sie: Das ist völlig unabhängig davon zu definieren, ob überhaupt eine solche existiert - man kann erst nach einer Definition danach fragen, ob eine existiert.)

Übung (3)

1. Lösen Sie in $\mathbb{R}$ die Gleichung $(a+1)\,x + 2x - 3 = 4x + 5$ (x Unbestimmte, a äußerer Parameter). Noch einmal: 'Lösen' heißt: Angeben der Lösungsmenge. - Geben Sie nunmehr die Lösungsmenge derselben Gleichung, aber mit a, x als zwei Unbestimmten. (Die Lösungsmenge ist dann die Menge aller Paare (a, x), welche die Gleichung erfüllen.)
2. Lösen Sie (d.h. geben Sie jeweils die Lösungsmengen an!) in $\mathbb{R}$ die Gleichungen:
   (a) $x^2 + x + 1 = 0$
   (b) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 2$
   (c) $x^2 + ax + 1 = 0$ (x Unbestimmte, a äußerer Parameter).
3. Sei X die Variable 'Geschwisterzahl' in einer kleinen endlichen Population, deren *sämtliche* Werte hiemit gegeben seien: $0,0,0,0,1,1,1,1,1,2,2,2,3,3,4$.
   (a) Zeichnen Sie nach Herstellen einer geeigneten Wertetabelle den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion.
   (b) Berechnen Sie $\sigma^2(X)$ als gewichtetes Mittel. Welcher Populationsanteil liegt in diesem Falle im Bereich $\mu(X) \pm 2\sigma(X)$?
4. Wir betrachten die Variable $Y =$ Testpunktzahl bei einem Leistungstest, in einer festgelegten großen Population. Die Variable Y liefere recht fein unterschiedene Werte, Hundertstelpunkte etwa, in einem Bereich von 50 bis 150.
   (a) Was ist hier anders als bei der Variablen X aus der vorigen Aufgabe?
   (b) Stellen Sie sich vor, Sie hätten (etwa anhand einer riesigen Stichprobe in sehr guter Näherung gewonnen) folgende Daten zur Verteilung von Y:

$Y-$ Wert	$50-80$	$80-90$	$90-100$	$100-110$	$110-120$	$120-150$
relative Häufigkeit	0.05	0.15	0.3	0.3	0.1	0.1

   (i) Was können Sie zur Lage von $\mu(Y)$ ohne Rechnung sagen?
   (ii) Schätzen Sie $\sigma(Y)$ *ohne Rechnung*.
   (iii) Zeichnen Sie ein Histogramm zur Verteilung (korrekte Beschriftung!), und zeichnen Sie parallel dazu den Graphen der Verteilungsfunktion zur Histogramm-Idealisierung der Verteilung.
   (iv) Berechnen Sie Näherungswerte für $\mu(Y)$ und $\sigma(Y)$. (Inwiefern sind das nur Näherungswerte?
5. Stellen Sie sich vor, Sie ziehen zufällig zwei mal hintereinander je eine Person aus der Population von Aufgabe 4. Überlegen Sie intuitiv, mit welchen Wahrscheinlichkeiten dabei folgende Ereignisse eintreten:
   (a) Der $Y-$ Wert der zuerst gezogenen Person liegt unter 80 oder über 120.
   (b) Die $Y-$ Werte beider gezogenen Personen liegen unter 90.
   (c) Der $Y-$ Wert einer der gezogenen Peronen liegt unter 90, und der $Y-$ Wert der anderen gezogenen Person liegt über 110.