

Übung (6)

- (1) Man zieht zufällig 6 Exemplare ('mit Zurücklegen') aus einer endlichen Population Ω , auf der die Variable X definiert ist.
 - (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man dabei nur X -Werte des unteren oder oberen Drittels?
 - (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man genau drei Exemplare mit X -Werten des unteren Drittels und genau drei Exemplare mit X -Werten des oberen Drittels?
- (2) Es bilden 5 Menschen eine Arbeitsgruppe, der eine bestimmte Aufgabe gestellt wird. Die einzelnen Mitglieder der Gruppe mögen folgende Wahrscheinlichkeiten haben, die Aufgabe korrekt zu lösen: $1/20$, $1/15$, $1/10$, $1/10$, $1/6$, $1/4$, $1/3$. Tatsächlich versuchen sich alle Mitglieder getrennt und völlig unabhängig an der Lösung. Nur kommen sie anschließend zusammen und seien genau dann in der Lage, eine richtige 'Gruppenlösung' abzuliefern, wenn mindestens eine korrekte Lösung eines Mitgliedes existiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit löst in diesem Sinne die Gruppe die Aufgabe? Was beobachten Sie? Können Sie das Resultat verallgemeinern?
- (3) Es habe genau ein Prozent einer Population eine bestimmte Krankheit. Ein (besonders guter) medizinischer Test dafür liefere ein Prozent 'falsch negative' Ergebnisse (d.h. jemand, der die Krankheit hat, wird mit dieser Wahrscheinlichkeit nicht als krank erkannt), ebenso ein Prozent falsch positiver Ergebnisse (d.h. jemand, der die Krankheit nicht hat, wird als in diesem Sinne 'krank' beurteilt). Ein zufällig gewähltes Mitglied der Population wird 'positiv' getestet (d.h. mit dem Testergebnis als 'krank' eingestuft). Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt besagte Krankheit bei ihm vor? Erkennen Sie, was daran überraschend ist, und sehen Sie ein, woran das liegt, indem Sie die Sache noch einmal rechnen unter der veränderten Bedingung, dass nicht ein Prozent, sondern 50 Prozent der Population die Krankheit haben (sonst bleibe alles gleich).
- (4) Wie viele Würfe benötigen Sie im Mittel, bis Sie eine Sechse geschafft haben (diesen erfolgreichen Versuch mitgezählt)? Mit welcher Wahrscheinlichkeit benötigen Sie genau 10 Würfe, bis Sie die erste Sechse gewürfelt haben?
- (5) Welchen Stichprobenumfang benötigen Sie, um eine unbekannte relative Häufigkeit mit 99% Sicherheit mit einem Fehler von höchstens 0.01 zu schätzen? Hinweis: Arbeiten Sie mit dem schlimmsten Fall - es ist der, dass die tatsächliche relative Häufigkeit $1/2$ ist. (Warum ist das der schlimmste Fall?)
- (6) Sie haben in einer Stichprobe vom Umfang 20 für eine Variable X gefunden: $\bar{x} = 20$, $s(X) = 5$. Welches zweiseitige 99%-Vertrauensintervall können Sie für $\mu(X)$ angeben?
- (7) Überprüfen Sie, ob folgende Aussage gilt: 'Wenn A und B ein abhängiges Paar bilden und ebenso B und C , dann auch A und C ' (alle Ereignisse im Rahmen eines Experiments, 'abhängig' natürlich im wahr-scheinlichkeitstheoretischen Sinne). Hinweis: Entweder kann man aus den gegebenen Voraussetzungen herleiten, dass auch A und C abhängig sein müssen, also zeigen, dass $P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$, oder aber man konstruiert ein Gegenbeispiel - wenn Sie das versuchen, so malen Sie zweckmäßig Teilmengen eines Quadrats auf und repräsentieren Häufigkeiten durch Flächeninhalte.