

Übung (4)

- (1) (a) Es habe genau der Anteil p einer endlichen Bevölkerung eine gewisse Eigenschaft. Geben Sie ein Zufallsexperiment und eine zugehörige Zufallsvariable an, derart, dass p die Wahrscheinlichkeit ist für ein (in diesem Rahmen zu formulierendes) Ereignis. Welchen Erwartungswert hat die erwähnte Variable?
(b) Es bestehe eine endliche Population Ω aus zwei disjunkten Teilpopulationen Ω_1, Ω_2 , also $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Eine gewisse Eigenschaft habe in Ω_i relative Häufigkeit p_i , $i = 1, 2$. Ω_1 habe relative Häufigkeit r in Ω . Was ist die relative Häufigkeit der erwähnten Eigenschaft in Ω ? Hinweis: Denken Sie daran, dass nach (a) die relative Häufigkeit einer Eigenschaft in einer (endlichen) Menge als Erwartungswert aufzufassen ist, und denken Sie an gewichtete Mittelbildung. Schreiben Sie den Sachverhalt nunmehr auch mit bedingten Wahrscheinlichkeiten symbolisch auf. Sie haben die Bayessche Formel für den Spezialfall von nur zwei Klassen.
- (2) Jemand hat vier Tätigkeiten in beliebiger Reihenfolge auszuführen - wie viele Reihenfolgen können gewählt werden? Vergleichen Sie mit Folgendem: Es sind vier Stunden mit jeweils einer beliebigen aus vier Tätigkeiten auszufüllen - wie viele Möglichkeiten dafür gibt es? Dritte Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, die vier Stunden wiederholungsfrei zu füllen (wieder mit je einer aus vier Tätigkeiten)? Verallgemeinern Sie alle Resultate, indem Sie die Zahl 4 durch eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 1$ ersetzen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Plätze mit je einem beliebigen Element aus einer Menge von m Elementen zu besetzen, mit erlaubten Wiederholungen / wiederholungsfrei ($n, m \geq 1$)?
- (3) Wie viele Folgen von Nullen und Einsen der Länge 13 gibt es, die genau 4 Einsen enthalten? Formulieren Sie das Resultat auch um als Aussage über Mengen. Wie wahrscheinlich ist es, bei 13 Würfeln mit einem (symmetrischen) Würfel genau vier Sechsen zu werfen?
- (4) Rechnen Sie möglichst praktisch (!) die Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass Sie bei zwei Würfeln mit einem symmetrischen gewöhnlichen Würfel eine Augensumme (beider Würfe) von höchstens 10 erhalten.
- (5) Ein typischer Anfängerfehler: Es wird mit großer subjektiver Überzeugung geglaubt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei 10 Würfeln mit einem symmetrischen Würfel höchstens 3 Sechsen zu haben, dieselbe sei wie die Wahrscheinlichkeit dafür, bei 20 Würfeln höchstens 6 Sechsen zu haben.
 - (a) Können Sie blitzschnell erklären, warum das falsch sein muss und welche der beiden Wahrscheinlichkeiten größer sein muss als die andere?
 - (b) Hätten Sie auch eine Idee, mit welchem durchaus korrekten Resultat das erwähnte falsche verwechselt wird? Hinweis: Denken Sie an Erwartungswerte und die Linearität des Erwartungswertoperators. Sehen Sie klar, dass die falsche Aussage keineswegs aus der richtigen folgt, und das doch, obgleich wir oben noch einmal verstärkt gelernt haben, dass man Wahrscheinlichkeiten als Erwartungswerte auffassen kann! (Sehen Sie: Das war ein konkretes Stück Denkpsychologie - Sie sollten auch sonst noch viele Gelegenheiten dafür finden, dass die meisten Widersprüche sich in Luft auflösen, wenn eine fehlerhafte Undifferenziertheit des Denkens vermieden wird.)
 - (c) Rechnen Sie beide Wahrscheinlichkeiten aus.
 - (d) Rechnen Sie auch näherungsweise in guter Näherung die Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass man bei 100 Würfeln mit einem gewöhnlichen Würfel höchstens 30 Sechsen bekommt.
- (6) Jemand löst (korrekt) eine Aufgabe gewissen Typs mit Wahrscheinlichkeit p , $0 < p < 1$. Wenn dieser Mensch jedoch zwei Aufgaben desselben Typs unmittelbar nacheinander lösen soll, gibt es auf Erfolg oder Misserfolg bei der ersten Aufgabe eine Reaktion: Im ersten Fall steigt die Wahrscheinlichkeit (für korrekte Lösung der zweiten Aufgabe) auf $p + (1 - p)/2$, im Fall des ersten Misserfolgs sinkt sie auf $p/2$. Sie stellen dem Menschen zwei solche Aufgaben unmittelbar nacheinander.
 - (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die zweite Aufgabe (korrekt) gelöst?
 - (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden beide Aufgaben gelöst?
 - (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird keine Aufgabe gelöst?