Übung (3)

(1) Eine Variable X habe Mittelwert $\mu(X) = 10$ und Streuung $\sigma(X) = 5$.
   (a) In welchem Bereich symmetrisch um $\mu(X)$ liegen dann mindestens 95% der Population gemäß der völlig allgemeinen Tschebyscheffschen Ungleichung? Mit welcher Wahrscheinlichkeit *höchstens* tritt ein $X-$ Wert auf, der mindestes 3σ von $\mu(X)$ entfernt liegt?
   (b) Nehmen Sie nunmehr an, X sei normalverteilt. Beantworten Sie die Fragen aus (a) für diesen Fall.

(2) Die Variable X sei normalverteilt mit $\mu(X) = 100$ und $\sigma(X) = 15$. (So ist es beim IQ, so dass Sie den hier stets als Konkretisierung heranziehen können.) *Schreiben Sie sämtliche Resultate dieser Aufgabe auch in der Form auf:* 'P(...(Ereignisformulierung)...) = ...'. Beispiel: $P(X \leq 110) = 0.75$ (gerundet, natürlich). Noch ein Hinweis: Sie sollten in allen Fällen, in denen man ein Resultat auf Grund eines schon ermittelten direkt voraussagen kann, nicht erneut rechnen, sondern sofort das Resultat sagen. (Stichwort: Symmetrie der Normalverteilungen)
   (a) Geben Sie jeweils das zweiseitige 95%$-$ [99%$-$] Vertrauensintervall (symmetrisch um den Mittelwert) für X.
   (b) Geben Sie das einseitige linksseitige 90%$-$ Vertrauensintervall für X.
   (c) Über welchem Wert von X liegt nur noch ein Tausendstel der Population?
   (d) Was ist die Grenze des untersten Quartils (d.h. Viertels) für X?
   (e) Welcher Anteil der Population liegt mit dem $X-$ Wert über 140 / unter 60?
   (f) Welcher Anteil der Population liegt mit dem $X-$ Wert zwischen 80 und 120?
   (g) Bei welchem Anteil der Population liegt der $X-$ Wert zwischen 80 und 100?

(3) Es sei X normalverteilt mit $\mu = 5$, $\sigma = 2$. Was wissen Sie dann vorab über die neue Variable $Y = 2X+3$? Was ist also $P(2X + 3 \leq 14)$?

(4) Es seien die Variablen X und Y (auf derselben Population definiert) unabhängig, beide normalverteilt, und zwar gelte $\mu(X) = 2$, $\sigma(X) = 3$, $\mu(Y) = 3$, $\sigma(Y) = 2$. Was wissen Sie vorab über die Variable $X - Y$? Was ist also $P(X < Y)$? Wie ändert sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn $\sigma(X)$ kleiner wäre? Machen Sie sich das anschaulich klar (Skizze!), rechnen Sie es aber auch nach.