Übung (9)

(1) Zu maximalisieren ist

$$f(\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^5}{5!} = \frac{1}{2!4!5!}e^{-3\lambda}\lambda^{11}.$$

Gleichwertig ist die Frage für die Funktion $g(\lambda) = e^{-3\lambda}\lambda^{11}$ (Weglassen der multiplikativen Konstanten). Man hat

$$g'(\lambda) = -3e^{-3\lambda}\lambda^{11} + 11e^{-3\lambda}\lambda^{10} = \lambda^{10}e^{-2\lambda}(11-3\lambda),$$

und das wird im Bereich $\lambda > 0$ nur Null für $\lambda = \frac{11}{3}$, und dort ist (Vorzeichenwechsel von g' (!)) auch tatsächlich ein lokales Maximum von g, dass sogar absolutes Maximum im Bereich $\lambda > 0$ ist. Offenbar stimmt die Schätzung mit der naheliegenden Bildung des arithmetischen Mittels der beobachteen Trefferzahl überein.

(2) Berechnung der Integrale:

(a) $\int_1^2 \left(e^{-3x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x} + 2\cdot 3\cdot x^{1/3}\right]_1^2 = -\frac{1}{3}e^{-6} + 6\sqrt[3]{2} + \frac{1}{3}e^{-3} - 6.$

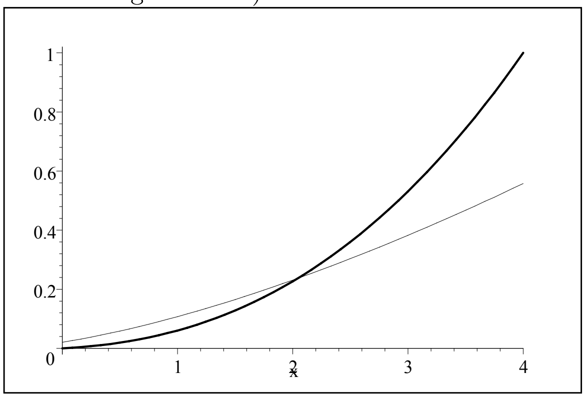
(b) $\int (2x-1)^6\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}(2x-1)^7 = \frac{1}{14}(2x-1)^7.$

(c) $\int \frac{2}{1-\frac{x}{2}}dx = -2\cdot 2\ln\left|1-\frac{x}{2}\right|$

(3) Die Variable X sei verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{242}(2x+1)^{3/2}, & 0 \le x \le 4, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

(a) Man überlegt, dass f einfach grob qualitativ wie eine Wurzelfunktion aussieht, nur wegen der Verschiebung (nach links!) bei $x = 0$ mit einem Wert > 0 beginnend. Den Graphen der Verteilungsfunktion erhält man, indem man vom Wert Null entsprechend den Werten der Dichtefunktion, welche ja die Steigungen vorschreibt, zunächst langsam (doch mit einem Steigungswert > 0 startend, dann immer schneller ansteigt, bis man bei $x = 4$ den Wert 1 erreicht. Wichtig: Man braucht dazu nicht die Rechnung von (b) schon erledigt zu haben oder auch den komplizierteren Weg zu gehen, sich den Graphen zum in (b) gefundenen Rechenausdruck zu überlegen. Hier ist das Resultat mit quantitativer Genauigkeit (dünn: Graph der Dichte, dick: Graph der Verteilungsfunktion):



Man sollte noch ein Stück weit nach links und rechts die Graphen zeichnen: Dichte konstant Null außerhalb des Intervalls [0,4], Verteilungsfunktion für $x < 0$ mit konstantem Wert Null, für $x > 0$ mit konstantem Wert 1.

(b) Wir berechnen die Verteilungsfunktion: Für $0 \le a \le 4$ haben wir:

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P(X \le a) = \int_0^a \frac{5}{242}(2x+1)^{3/2}\,dx = \left[\frac{1}{242}(2x+1)^{5/2}\right]_0^a \\ &= \frac{1}{242}(2a+1)^{5/2} - \frac{1}{242}. \end{aligned}$$

Nun die Fallunterscheidung: Für $a < 0$ gilt $F(a) = 0$, für $a > 4$ haben wir $F(a) = 1$. Wir folgern für $Y = 2X + 1$:

$$F_Y(a) = P(2X + 1 \leq a) = P\left(X \leq \frac{a-1}{2}\right) = F_X\left(\frac{a-1}{2}\right) = \frac{1}{242}a^{5/2} - \frac{1}{242}.$$

Dies gilt für $0 \leq \frac{a-1}{2} \leq 4$, also $1 \leq a \leq 9$. Beachten Sie: Nimmt X Werte in [0,4], so nimmt $2X + 1$ Werte in [1,9]. Vollständig zusammengefasst:

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 \text{ für } a < 1 \\ \frac{1}{242}a^{5/2} - \frac{1}{242} \text{ für } 1 \leq a \leq 9 \\ 1 \text{ für } a > 9 \end{cases}.$$

Durch Ableiten erhalten wir nunmehr leicht die Dichte g zur Variablen Y:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{5}{484}x^{3/2} \text{ für } 1 \leq x \leq 9 \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

(c) Wir haben

$$\begin{aligned}
\mu(Y) &= \int_1^9 x \cdot \frac{5}{484}x^{3/2}dx = \int_1^9 \frac{5}{484}x^{5/2} = \left[\frac{5}{484} \cdot \frac{2}{7}x^{7/2}\right]_1^9 \\
&= \frac{5465}{847} \approx 6.4522. \\
\mu\left(Y^2\right) &= \int_1^9 x^2 \cdot \frac{5}{484}x^{3/2}dx = \int_1^9 \frac{5}{484}x^{7/2} = \left[\frac{5}{484} \cdot \frac{2}{9}x^{9/2}\right]_1^9 \\
&= \frac{49\,205}{1089}, \text{ also} \\
\sigma^2(Y) &= \mu\left(Y^2\right) - \mu^2(Y) = \frac{49\,205}{1089} - \left(\frac{5465}{847}\right)^2 = \frac{22\,940\,420}{6456\,681} \approx 3.552\,97, \\
\sigma(Y) &= \sqrt{\sigma^2(Y)} \approx 1.885.
\end{aligned}$$

Entsprechend hat man $\mu(X) = \mu\left(\frac{Y-1}{2}\right) = \frac{1}{2}\mu(Y) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5465}{847} - \frac{1}{2} \approx 2.726$ und $\sigma(X) = \frac{1}{2}\sigma(Y) \approx 0.9425$. Man beachte, dass die entsprechenden Integrale für $\mu(X)$ und $\sigma^2(X)$ viel schwieriger gewesen wären als die für $\mu(Y)$, $\sigma^2(Y)$.

(4) Die Variable $T =$ Wartezeit bis zum ersten Poissontreffer [in Minuten] hat die Verteilungsfunktion

$$F_T(a) = 1 - e^{-2a}, \text{ für } a \geq 0.$$

Die Gleichung $F_T(a) = \frac{1}{2}$ ergibt also $1 - e^{-2a} = \frac{1}{2}$, gleichwertig $e^{-2a} = \frac{1}{2}$, gleichwertig $-2a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, somit gilt $Median(T) = \frac{\ln(2)}{2}$. Man beachte: Der Erwartungswert $\frac{1}{2}$ liegt höher.