Lösungen zu Übung (8)

(1) (a) Wir haben $\sum_{k=0}^{3}\binom{20}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{20-k} = 0.016\,12$, drei Treffer sind also schon zu viele, dagegen ist $\sum_{k=0}^{2}\binom{20}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{20-k} = 0.0036$, also deutlich kleiner als die geforderten 0.01. Man kann also verwerfen auf einem Niveau, das mindestens so gut ist wie $\alpha = 0.01$, genau dann , wenn man höchstens zwei Treffer bekommt. (Wieder liegt es an der deutlich diskreten (nicht annähernd stetigen) Verteilung, dem Springen der Verteilungsfunktion, dass man bereits auf dem besseren Niveau von etwa 0.0036 arbeiten muss, um 0.01 einzuhalten - daher das 'mindestens so gut wie α' als Zusatz zum Niveau.

(b) Nun rechnen wir aus, wie wahrscheinlich es ist, höchstens zwei Treffer zu bekommen, wenn die Trefferwahrscheinlichkeit tatsächlich genau 0.3 ist: $\sum_{k=0}^{2}\binom{20}{k}\left(\frac{3}{10}\right)^k\left(\frac{7}{10}\right)^{20-k} = 0.0355$. Das heißt: $\beta = 1 - 0.0355 = 0.9645$.

(c) Man beachte, wie erbärmlich das Resultat von (b) ist: Mit einer Wahrscheinlichkeit von über 0.96 machen wir den Fehler 2. Art, so dass wir bei dem üblichen Verfahren, nur ein gutes Nibeau α zu wählen, unter den angegebenen Verhältnissen recht sicher sind, die Hypothese nicht verwerfen zu können, obwohl sie falsch ist. Daher ist es völlig verfehlt, unter derartigen Bedingungen zu glauben, die Hypothese sei wahr, weil sie nicht verworfen wurde! Beachten Sie noch, dass das Ausmaß der Falschheit der Hypothese durchaus beträchtlich war. Wir werden gleich sehen, dass der geringe Stichprobenumfang in Verbindung mit dem Niveau $\alpha = 0.01$ dafür verantwortlich war.

(d) Bei $n = 100$ erwarten wir, dass mit höherer Wahrscheinlichkeit die zu beobachtende Trefferhäufigkeit näher bei der (nach den wirklichen Verhältnissen) zu erwartenden liegt, mithin eine höhere Wahrscheinlichkeit des Verwerfens falscher Hypothese, geringeres β. Genau sieht die Sache so aus: Bezeichnen wir mit X die Variable 'Trefferzahl'. Dann ist (gerechnet mit dem Grenzwert der Hypothese) $P(X \leq 28) = 0.0084$, $P(X \leq 29) \approx 0.0148$. Ohne Computer rechnen wir das natürlich mit Normalverteilung: $40 - 2.33 \cdot \sqrt{40 \cdot 0.6} = 28.59$. Denken wir noch an die Stetigkeitskorrektur, so würden wir jedenfalls 28 nehmen als Höchstgrenze. Wir sehen also, dass wir genau zum Resultat der exakten Rechnung kommen. Nun ebenfalls mit Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei tatsächlichem Wert $p = 0.3$ höchstens 28 Treffer erscheinen: $P(X \leq 28) \approx \Phi_{0,1}\left(\frac{28.5-30}{\sqrt{100\cdot 0.3\cdot 0.7}}\right) \approx \Phi_{0,1}(-0.33) = 0.3707$. Also haben wir immer noch $\beta > 0.62$, doch deutlich geringere Fehlerwahrscheinlichkeit zweiter Art als beim geringeren Stichprobenumfang. Allgemein gilt: Erhöhung des Stichprobenumfangs bedeutet eine Verringerung von β bei sonst gleichen Werten (Ausmaß der Falschheit der Hypothese und α). Allerdings bedarf es, wie man sieht, gewaltiger Stichprobenumfänge, sowohl α als β klein zu bekommen, auch wenn eine Hypothese noch deutlich falsch ist.

Nun zum zweiten Beispiel: $\alpha = 0.05$. Klar ist vorab, dass wir bei bescheidenerem α leichter zum Verwerfen kommen, β daher geringer werden sollte. Rechnen wir das nach: $40 - 1.65\sqrt{40 \cdot 0.6} = 31.92$, also wäre bis zu 31 Treffern zu verwerfen, und $P(X \leq 31) \approx \Phi_{0,1}\left(\frac{31.5-30}{\sqrt{100\cdot 0.3\cdot 0.7}}\right) \approx \Phi_{0,1}(0.33) = 0.63$. β ist daher auf etwa 0.37 abgesunken, aber immer noch beträchtlich - wir haben immer noch keinerlei vernünftige Sicherheit für das 'Annehmen, die Hypothese sei wahr'.

(e) Wenn die Hypothese um weniger falsch ist, wird β natürlich größer.

(2) (a),(b) Zunächst einmal ist ein Ansteigen nach unendlich, über alle Grenzen hinaus, denkbar, dann aber auch ein Ansteigen, das gegen einen Schwellenwert geht, ohne diesen je zu erreichen. Beim Ansteigen nach Unendlich kann man eine fallende Steigung haben, eine noch immer anwachsende Steigung oder auch eine konstante Steigung, wobei das nur die einfachsten Grundmodelle sind. Beispiele für den ersten Fall: $f(t) = \sqrt{t}$ oder $f(t) = \ln(t)$, für den zweiten: $f(t) = t^2$, $f(t) = e^t$, für den

dritten: $f(t) = mt$, $m > 0$. Für das asymptotische Ansteigen gegen einen Schwellenwert haben wir als Beispiele etwa $f(t) = S - e^{-t}$, oder auch $f(t) = \frac{St}{1+t}$, $t > -1$, beide Male mit Schwellenwert S.

(c) Wie soeben gesehen, gibt es ganz verschiedene Modelle eines Wachstums mit fallender Steigung. Für das zu beschreibende Beispiel ist eine Wurzelfunktion offenbar kein angemessenes Modell, weil wir im Beispiel ein Ansteigen gegen einen Schwellenwert erwarten, eventuell mit Erreichen dieses Wertes, um konstant darauf zu verbleiben, keineswegs aber auch nur die Möglichkeit eines unbegrenzten Anstieges ins Auge zu fassen hätten, der jedoch eine zwingende Eigenschaft der Wurzelfunktionen ist. Somit kämen eher Modelle der Art der letzten oben genannten Beispiele in Betracht, wobei man noch geeignet weitere Parameter anzubringen hätte, etwa $S - e^{-\alpha t}$, $\frac{St}{\alpha+\beta t}$.
Was man sich aus diesem Beispiel merken sollte: Das zu beschreibende Phänomen sollte schon etwas genauer und nicht ins Beliebige vergröbert ins Auge gefasst werden, auf der anderen Seite sollte man einige Kenntnisse denkbarer mathematischer Modelle haben, im Verein dieser beiden Momente könnte man dann einige Arbeit investieren und noch etwas Glück haben. Das sind so die notwendigsten Voraussetzungen für jemanden, der etwas modellieren will, und dann gibt es auch Chancen, die Sache gut zu machen. Kommt noch ein ziemlich philosophischer Punkt hinzu: Man kann niemals bei komplexen Sachverhalten beanspruchen, ein Modell als 'bestmögliches' zu begründen, sondern immer nur feststellen, wie gut es in einem bestimmten Rahmen funktioniert und korrekte Voraussagen erlaubt - die Existenz eines besseren ist immer denkbar. Lediglich unter sehr präzisen Voraussetzungen kann man zuweilen beweisen, dass ein mathematisches Modell in einem gewissen Sinne das einzige ist, das einen Katalog von Bedingungen erfüllt.

(3) (a) $f(x) = (x-1)^3$: Der Graph entsteht aus dem bekannten zu $g(x) = x^3$ durch Verschieben nach rechts (!) längs der $x-$ Achse um 1.

(b) $h(x) = 2\left(3x+1\right)^2$: Der Graph entsteht aus dem bekannten von $k(x) = x^2$, indem man in dieser Reihenfolge ausführt: Verschieben längs der $x-$ Achse um 1 nach links (!), dann Stauchen längs der $x-$ Achse mit Faktor 3, dann Strecken längs der $y-$ Achse mit Faktor 2. (Es gäbe keine Änderung des Resultates, wenn man die letztere Operation an beliebige Stelle in der Reihenfolge versetzte.) Grob qualitativ sieht das Ganze also aus wie eine Parabel, die nach oben geöffnet ist und die $x-$ Achse im Punkt $x_0 = -\frac{1}{3}$ berührt.

(c) $u(x) = \ln\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$: Der Graph entsteht aus dem von ln, indem man zuerst um 1 längs der $x-$ Achse nach links verschiebt, dann an der $y-$ Achse spiegelt und mit Faktor 2 längs der $x-$ Achse streckt (!). Also grob wie ln, nur zur linken Seite vom Pol bei $x_0 = 2$ ansteigend.