

Lösungen zur Übung (7)

**Wichtige Vorbemerkung:** Bei jedem Hypothesentest sollte eine Skizze gemacht werden, die eine Normalverteilungsglocke enthält (diese passt in unseren Fällen immer, weil wir für Hypothesen über unbekannte Mittelwertestets mit Normalverteilung oder  $t$ -Verteilung arbeiten. Die Skizze sollte den Mittelwert (der fraglichen Variablen, das kann eben auch einmal eine Differenzvariable sein) laut Hypothese (bzw. den Grenzfall dafür laut einseitiger Hypothese) sowie den fraglichen beobachteten Wert und die Kennzeichnung des Verwerfungsbereiches enthalten. Die einzige Variation, die noch verbleibt, ist die, dass man einmal die Verwerfungsgrenze(n) gemäß vorgegebenem Signifikanzniveau ausrechnet, das ander Mal dagegen das mögliche Verwerfunsniveau durch Ansetzen der Vertrauensintervallgrenze beim beobachteten Wertes bestimmt. (Mit dieser graphischen Absicherung werden erfahrungsgemäß nicht nur viele Fehler vermieden, sondern auch das Verständnis stark gefördert.

- (1) (a) Einseitig, wie die Formulierung des Problems schon sagt - wir ziehen gar nicht in Betracht, dass  $B$  besser sein könnte. Die tatsächlich getestete Hypothese lautet also technisch: ' $p \leq 1/2$ ', wobei mit  $p$  die Wahrscheinlichkeit für einen  $A$ - Sieg im Einzelfall bezeichnet ist.
- (b)  $\sum_{k=17}^{20} \binom{20}{k} \frac{1}{2^{20}} = 0.00129$ , das gewählte Niveau ist also nur wenig schlechter als  $1/1000$ .
- (c) Für das Niveau  $0.05$  suchen wir  $k_0$ , so dass  $\sum_{k=k_0}^{20} \binom{20}{k} \frac{1}{2^{20}}$  gerade  $< 0.05$  wird. Durch Probieren findet

man  $\sum_{k=15}^{20} \binom{20}{k} \frac{1}{2^{20}} = 0.021$ ,  $\sum_{k=14}^{20} \binom{20}{k} \frac{1}{2^{20}} = 0.058$ , also kann man ab 15 Siegen für  $A$  die nämliche Entscheidung treffen, wenn man dies schwächere Niveau wählt. Wie man sieht, wird tatsächlich ein deutlich besseres (nahe  $0.002$ ) eingehalten, während bei der Grenze  $14$  das Niveau  $0.05$  bereits überschritten wird - eine Folge der Diskretheit der Verteilung, bei relativ wenigen auftretenden Werten fällt das oftmals sehr deutlich ins Gewicht. Man könnte wegen  $p = 1/2$  (gemäß Hypothese ist damit zu arbeiten) auch an die Näherung mit Normalverteilung denken, aber die Zahlen sind moderat genug, die genauere Binomialverteilung zu benutzen. Hier sind immerhin zum Vergleich die Näherungswerte: Für  $X =$  Zahl der Siege für  $A$  haben wir dann

$$P(X \geq 17) \approx 1 - \Phi_{0,1} \left( \frac{16.5 - 10}{\sqrt{20/4}} \right) \approx \Phi_{0,1}(-2.91) \approx 0.0018$$

Man sieht, dass das nicht eben so ganz genau ist, doch auch nicht gerade einen qualitativen Unterschied macht. Für das  $5\%$ -Niveau erhalte man auf diesem Wege die Grenze  $10 + 1.65\sqrt{5} = 13.6895$ , also würde man ab  $14$  Siegen für  $A$  die Hypothese verwerfen und damit tatsächlich das  $5\%$ -Niveau um sehr wenig verfehlen, wie oben genauer gesehen.

- (2) (a)  $0.3 + z\sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{80}} = 0.4$  ergibt  $z = 1.9518$ , und  $\Phi_{0,1}(1.9518) = 0.0255$  (gerundet), also kann man die Hypothese auf einem Niveau von wenig mehr als  $2.5\%$  verwerfen. Man beachte: Es ist der Inhalt der Hypothese vorauszusetzen, also ist  $\sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{80}}$  die maximal mögliche Streuung, entsprechend ist auch Normalverteilung zu benutzen (und nicht  $t$ -Verteilung, die bei Arbeiten mit Streuungsschätzung korrekt ist).
- (b) Das rechtsseitige  $99\%$ -Vertrauensintervall für die unbekannte relative Häufigkeit anhand des empirisch Gefundenen lautet - wir geben nur die Grenze an:

$$0.4 - t_{0,99}^{79} \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{79}}.$$

(Bemerkung:  $t_{0,01}^{79} = -t_{0,99}^{79}$ , die  $t$ -Verteilungen sind ebenso symmetrisch um  $0$  wie die Normalverteilungen mit Mittelwert  $0$ .) Man beachte, was hier alles anders ist und sein muss als in (a) -

insbesondere hat man mit  $t$ -Verteilung zu arbeiten! Allerdings können wir in der Tabelle nicht zu 79 Freiheitsgraden nachschlagen, wir nehmen getrost 80 im Vertrauen darauf, dass der Unterschied sehr gering sein dürfte: In der Tat ist 2.38 korrekt nicht nur für 80, sondern auch noch für 79 Freiheitsgrade. Also haben wir die Grenze

$$0.4 - 2.38 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{79}} = 0.2688.$$

Mit Sicherheit 99% wissen wir also nur, dass die relative Häufigkeit über 0.2688 liegt. Hätten wir etwas wurstiger mit Normalverteilung gearbeitet - jedoch noch korrekt mit der Streuungsschätzung für die Streuung eingesetzt, so wären wir auf die Grenze  $0.4 - 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{79}} = 0.271575$  gekommen. Die Näherung an die Normalverteilung ist mit 80 Freiheitsgraden eben schon recht ordentlich. Quantitativ bedeutsamer ist es hier - und das könnte sich in anderen Beispielen drastischer auswirken, dass die Streuungsschätzung einzusetzen ist und nicht etwa die maximale Streuung 'laut Hypothese' wie in Aufgabenteil (a)!

- (c) Wir haben  $\bar{x} = 2.19$ ,  $s(X) = 0.9585$ , also  $s(\bar{X}) = 0.3031$ . Daher (9 Freiheitsgrade, Nachschlagen zur Wahrscheinlichkeit 0.975!) das Vertrauensintervall  $[2.19 - 2.26 \cdot 0.3031; 2.19 + 2.26 \cdot 0.3031] = [1.505; 2.875]$ . Tatsächlich ist das etwas zu klein, genauer hat man  $[1.5043; 2.8757]$  (mit etwas größerem genauem  $t$ -Wert und Runden nach der sicheren Seite). Die Rede ist von drei Mittelwerten, wenn man es genau nimmt. Zunächst einmal ist die Variable so definiert, dass beim Einzelnen über die Tage gemittelt werden muss. Sodann hat man von dieser Variablen  $F$  einmal den unbekanntem (Populations-) Mittelwert  $\mu(F)$ , sodann das beobachtete Stichprobenmittel  $\bar{f} = 2.19$ .
- (d) Man hat die Gleichung zu lösen:

$$1.5 + t \cdot 0.3031 = 2.19$$

Das ergibt  $t = 2.2764764$ , also eine Wahrscheinlichkeit zwischen 0.01 und 0.025 rechtsseitig. Das Signifikanzniveau liegt also zwischen 0.01 und 0.025 (näher am letzteren Wert), wie man mit der ungenauen Tabelle noch ermitteln kann. Genauer hat man 0.0244. Nach a. wusste man schon, dass dies Niveau unter 0.025 liegen musste!

- (e) Wir brauchen zunächst die Vertrauensgrenze der entsprechenden  $t$ -Verteilung, ablesen können wir zur Wahrscheinlichkeit 0.95 den  $t$ -Wert 1.83. Wir wollen aber linksseitig 5%, so dass klar  $-1.83$  richtig ist, genauer:  $-1.8331129$ .

$$c - 1.833 \cdot 0.3031 = 2.19$$

Man könnte also die Hypothese ' $\mu(F) \geq 2.75$ ' auf 5%-Niveau verwerfen. Nach a. konnte man voaraussagen, dass diese Grenze ein wenig unter 2.876 zu liegen hatte.

- (3) Es sei  $X$  die Variable 'mittlere Zahl von Herzschlägen pro Minute' (zu messen unter bestimmten Bedingungen),  $A$  und  $B$  seien getrennte Bevölkerungsgruppen, und mit  $X|_A$  werde die Einschränkung der Variablen  $X$  auf  $A$  bezeichnet, analog mit  $X|_B$  die Einschränkung auf  $B$ . Sie haben bei einer Stichprobe von 100 Leuten aus  $A$  eine mittlere Herzfrequenz von 60 Schlägen pro Minute mit zugehörigem Streuungsschätzwert  $s(X|_A) = 3$  und in einer Stichprobe des Umfangs 120 aus Gruppe  $B$  eine solche von 75 Schlägen pro Minute beobachtet, mit zugehörigem Streuungsschätzwert  $s(X|_B) = 5$ . Hinweis: Arbeiten Sie im Folgenden mit Normalverteilung, überlegen Sie jedoch und formulieren Sie genau, um die Verteilung welcher Variablen es geht.)

(a)  $15 \pm 2.58 \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{25}{120}}$ , also  $[13.59; 16.41]$

- (b) Der Test führt selbstverständlich zum Verwerfen der Hypothese ' $\mu(X|_B) - \mu(X|_A) \leq 13$ ' auf 1%-Niveau - die zweiseitigen Grenzen sind ja weiter zu stecken als die einseitigen, wie sich nunmehr auch bestätigt: Das beste Niveau, auf dem die genannte einseitige Hypothese zu verwerfen wäre, rechnet

man über  $13 + z\sqrt{\frac{9}{100} + \frac{25}{120}} = 15$ ,  $z = 3.66167$ , das zugehörige Niveau liegt unter  $1/1000$ , wie Sie auch der hier zu groben Tabelle entnehmen können. Genauer ergibt sich  $\alpha = \Phi_{0,1}(-3.66167) = 0.000125$ , das ist also nahe  $1/10000$ .

- (c) Weil  $\mu(X|_B) - \mu(X|_A)$  nicht  $\bar{x}_B - \bar{x}_A$  ist und genauer: Weil die Lösung derselben Aufgabe wie (b) mit der Hypothese  $\mu(X|_B) - \mu(X|_A) \leq 15$  auf  $z = 0$ , also Irrtumswahrscheinlichkeit  $1/2$  führt, was wir auch sofort mit der ersten Bemerkung intuitiv einsehen können, indem wir uns klar machen: Die mit den Stichproben beobachtete Mittelwertdifferenz fällt mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  höchstens so groß aus wie die wirkliche bei den Populationen.