Lösungen zur Übung (4)

(1) (a) Experiment: Ein Mitglied der Population wird zufällig gezogen. Zufallsvariable X: Bekommt den Wert 1, wenn das zufällig gezogene Mitglied die Eigenschaft besitzt, sonst den Wert 0. Dann ist X eine $p-Bernoulli-Variable$ und hat Erwartungswert p. Auch ist P('das gezogene Mitglied hat die Eigenschaft') $= P(X=1) = p$. Das kann man auch direkt daran sehen, dass wegen des zufälligen Ziehens jedes Mitglied mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen wird und daher die Wahrscheinlichkeit des besagten Ereignisses seine relative Häufigkeit in der Population ist, also p.

(b) Es sei X die zur Eigenschaft gehörige Bernoulli-Variable. Es sei das Ereignis A die Teilmenge von Ω, die aus allen Elementen mit der besagten Eigenschaft besteht. Es ist also A dasselbe wie $X=1$. Wir haben $\mu(X) = \mu\left(X_{|\Omega_1}\right) \cdot P(\Omega_1) + \mu\left(X_{|\Omega_2}\right) \cdot P(\Omega_2) = p_1 \cdot r + p_2(1-r)$. Genau dies sagt auch die Bayessche Formel für den Spezialfall zweier Klassen, in der Form

$$P(A) = P(A|\Omega_1) \cdot P(\Omega_1) + P(A|\Omega_2) \cdot P(\Omega_2) = p_1 r + p_2(1-r).$$

Beachten Sie, dass wir die erste Version selbstverständlich auf eine beliebige Zahl von Klassen verallgemeinern können, so dass wir eine neue Herleitung der Bayesschen Formel haben.

(2) Anzahl der möglichen Reihenfolgen von 4 Tätigkeiten: $4! = 24$. Anzahl der Belegungen von 4 Plätzen mit vier Objekten, Wiederholungen erlaubt: 4^4. Ohne Wiederholungen: 4! Allgemeiner: Anzahl der Reihenfolgen von n Objekten: n! Anzahl der Belegungen von n Plätzen durch je eines von m Objekten: m^n (mit erlaubten Wiederholungen), ohne Wiederholung: $m(m-1) \cdot ... (m-n+1)$, wenn $m \geq n$, 0 kommt heraus, wenn $m < n$.

(3) Es gibt so viele Möglichkeiten, Folgen von Nullen und Einsen der Länge 13 zu bilden mit genau 4 Einsen, wie es Möglichkeiten gibt, aus einer Menge von 13 Elementen genau 4 auszuwählen, also $\binom{13}{4} = 715$. Die Wahrscheinlichkeit für genau 4 Sechsen bei 13 Würfen mit einem gewöhnlichen Würfel ist (X binomialverteilt mit $n = 13, p = 1/6$):

$$P(X=4) = \binom{13}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 0.107.$$

(4) Es ist praktisch, die Wahrscheinlichkeit für Augensumme *über* 10 (also 11 oder 12) auszurechnen durch Auszählen und dann zum Komplement überzugehen. Wir haben die (gleichwahrscheinlichen) Fälle $(5,6), (6,5), (6,6)$, also 3 von 36 oder 1/12, somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit 11/12.

(5) (a) Stichprobenmittelvariablen $\overline{X}$ haben kleinere Streuung mit wachsendem n, wenn mur $\sigma(X) > 0$. Also ist die zweite Wahrscheinlichkeit höher als die erste. Denn mit größerer Wahrscheinlichkeit landet man mit der durchschnittlichen Zahl der Sechsen pro Wurf näher beim Erwartungswert, eine durchschnittliche Zahl von 3/10 (deutlich größer als 1/6) oder mehr ist also bei 20 Würfen unwahrscheinlicher.

(b) Das korrekte Resultat, an das (allzu vage) gedacht wird: $\mu(X_1 + X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2)$ mit $X_1 =$ Anzahl der Sechsen bei den ersten zehn Würfen, $X_2 =$ Anzahl der Sechsen bei den zweiten zehn Würfen. Aber daraus folgt keineswegs so etwas wie $P(X_1 \leq a) = P(X_1 + X_2 \leq 2a)$. Hier werden keine Erwartungswerte addiert, sondern Ungleichungen bei Ereignisformulierungen. Es gibt überhaupt keinen einfachen Zusammenhang zwischen den Wahrscheinlichkeiten der genannten Ereignisse!

(c) Man rechnet aus:

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq 4) &= \sum_{k=0}^{3}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} \approx 0.93 \\ P(X_1 + X_2 \leq 8) &= \sum_{k=0}^{6}\binom{20}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{20-k} = 0.963. \end{aligned}$$

(d) Für diese Frage muss man (wenn man denn nicht mit geeignetem Computerprogramm binomial exakt rechnen kann) die Näherung mittels Normalverteilung heranziehen, wobei man Stetigkeitskorrektur verwenden sollte: Sei X also die Anzahl der Sechsen bei 100 Würfen. Dann hat man

$$P(X \leq 30) \approx \Phi_{100/6;\sqrt{100/6 \cdot 5/6}}(30.5) = \Phi_{0,1}\left(\frac{30.5 - 100/6}{\sqrt{100/6 \cdot 5/6}}\right) \approx \Phi_{0,1}(3.71) \approx 0.9999.$$

Das kann man schon nicht mehr der Tabelle entnehmen. Übrigens ist ein genauerer Wert 0.9997 (wir näherten ja mit Normalverteilung). Aber das Resultat war klar zu erwarten, dass die Wahrscheinlichkeit noch deutlich höher würde als im Falle der 20 Würfe.

(6) (a) Bezeichnen wir mit Z das Ereignis, dass die zweite Aufgabe gelöst wird, mit A das Ereignis, dass die Erste gelöst wird, so haben wir mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit (für die meisten Studenten sinnfälliger mit den Wahrscheinlichkeitsbäumen zu implementieren):

$$P(Z) = P(Z|A) \cdot P(A) + P(Z|B) \cdot P(\overline{A}) = (p + \frac{1-p}{2})p + \frac{p}{2}(1-p) = p.$$

(b) $P(A \cap Z) = P(Z|A)\, P(A) = \frac{1}{2}(p+1)\, p.$

(c) $P(\overline{A} \cap \overline{Z}) = P(\overline{Z}|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = \left(1 - \frac{p}{2}\right)(1-p)$. (Nicht etwa 1− Resultat von (b)!)