Lösungen zu (3)

(1) Eine Variable X habe Mittelwert $\mu(X) = 10$ und Streuung $\sigma(X) = 5$.

(a) Nach Tschebyscheff: $P(|X - \mu(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$. Wir suchen also die Zahl ε, so dass

$$\frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{20}$$

Lösen der Gleichung ergibt $\varepsilon = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$,etwas weniger als 22.4. Also liegen im Bereich $[-12.4; 32.4]$ jedenfalls mindestens 95% der Population. Zweite Frage:

$$P(|X - \mu(X)| \geq 3\sigma) \leq \frac{\sigma^2(X)}{9\sigma^2(X)} = \frac{1}{9}.$$

Also ist die gefragte Wahrscheinlichkeit höchstens 1/9.

(b) Man beachte noch einmal, dass die Resultate von (a) die denkbar schwächsten sind, gültig für alle Variablen. Setzen wir Normalverteilung von X voraus, so erhalten wir stattdessen für die erste Frage das Intervall $10 \pm 1.96 \cdot 5$, also $[0.2; 19.8]$, viel schmaler. Für die zweite Frage: Etwa 0.0027. (Vergleichen Sie, was man mit der in diesem Bereich noch zu groben Tabelle sagen kann.)

(2) (a) 95%: $[100 - 15 \cdot 1.96, 100 + 1.96 \cdot 15] = [70.6, 129.4]$, auch überschlagen mit 2σ, was $[70, 130]$ ergäbe, 99%: $[100 - 2.58 \cdot 15, 100 + 2.58 \cdot 15] = [61.3, 138.7]$. Die geforderte Formulierung: $P(70.6 \leq X \leq 129.4) = 0.95$, analog für 0.99.

(b) $100 + z_{0.9}15 = 100 + 1.29 \cdot 15 = 119.35$. Es geht natürlich auch so: Zu lösen ist

$$\begin{aligned}
\Phi_{100;15}(x) &= 0.9, \text{ gleichwertig} \\
\Phi_{0,1}\left(\frac{x - 100}{15}\right) &= 0.9, \text{ gleichwertig} \\
\frac{x - 100}{15} &= \Phi^{-1}(0.9) = z_{0.9} \stackrel{Tabelle}{=} 1.29, \text{ oder} \\
x &= 100 + 15 \cdot 1.29
\end{aligned}$$

Man beachte, wie bequem unsere Vertrauensintervallformeln das alles gleich umsetzen! (1.29 ist natürlich ungenau, genauer ist 1.282. Wichtig: Für Vertrauensintervalle 'darf es etwas mehr sein', aber nicht andersherum. Mit zwei Stellen hinter dem Komma also 1.29, wie die Tabelle sagt.)

(c) $100 + z_{0.999}15$, etwa $100 + 3.1 \cdot 15 = 146.5$. Faustregel wäre hier: '3σ'.)

(d) $100 - 0.6745 \cdot 15 = 89.88$.

(e) Vorab: Antworten gleich! Res. etwa 0.0038. Nicht vergessen: $P(X \geq 140) = P(X \leq 60) = 0.0038$. (Und so in jedem Falle!)

(f) Praktisch rechnen: Resultat ist $1 - 2\Phi_{0,1}\left(\frac{80-100}{15}\right) = 0.82$ (gerundet).

(g) Antwort unmittelbar: Die Hälfte des vorigen Resultats.

(3) Wenn X normalverteilt ist mit $\mu = 5$, $\sigma = 2$, so ist $Y = 2X + 3$ ebenfalls normalverteilt, und zwar mit $\mu(Y) = 13$, $\sigma(Y) = 4$, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\Phi_{0,1}\left(\frac{14-13}{4}\right)$, und das ist etwa 0.5987.

(4) Unter den angegebenen Voraussetzungen hat man: $X - Y$ ist normalverteilt mit $\mu(X - Y) = \mu(X) - \mu(Y) = -1$, $\sigma(X - Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)} = \sqrt{13}$, ungefähr 3.61. Damit gilt $P(X < Y) = P(X - Y) < 0 = P(X - Y) \leq 0 = \Phi_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) \approx \Phi_{0,1}(0.28) \approx 0.61$.

Nun zur Frage, was mit kleinerem Wert von $\sigma(X)$ passiert: Der Zähler des Bruches, von dem der Wert unter $\Phi_{0,1}$ genommen wird, ändert sich nicht, und der Nenner wird kleiner, also hat der Bruch einen größeren Wert, und die Wahrscheinlichkeit wird größer. (Die Verteilungsfunktion $\Phi_{0,1}$ ist streng monoton steigend!) Anschaulich: Malt man beide Normalverteilungen von X und Y auf, so sieht man bei schmalerer Glocke zu X (kleineres $\sigma(X)$!), dass die Portion der Bevölkerung, deren $Y-$ Wert unter dem $X-$ Wert liegt, kleiner wird.