

Lösungen zur Übung (1)

- (1) (a) Es sollte leicht fallen, eine 'Urliste' herzustellen, d.h. willkürliche Folge aller Werte auf Zuruf. Stabdiagramm: Man sollte die Ordinate nicht gerade wie sonst üblich durch $x = 0$ legen. Achten Sie darauf, dass die Stäbe vernünftige Längen bekommen (willkürlich wählbarer Maßstab) und dass die Ordinate geeignete Werte-Markierungen erhält sowie beide Achsen vernünftig beschriftet werden.
- (b) Man sollte eine Tabelle 'Wert / relative Häufigkeit (des betreffenden Wertes)' anfertigen und verifizieren, dass gewichtetes Mittel (der Werte ohne Wiederholungen, gewichtet mit den zugehörigen relativen Häufigkeiten) und arithmetisches Mittel aller Werte (mit Wiederholungen) dasselbe Resultat ergeben.
- (c) $\sigma^2(X) = \mu\left((X - \mu(X))^2\right)$ sollte genutzt und mittels einer (zur oben genannten) analogen Tabelle 'Wert von $(X - \mu(X))^2$ / zugehörige relative Häufigkeit (das ist natürlich dieselbe wie die des zugehörigen X - Wertes)' ausgerechnet werden als gewichtetes Mittel. (Also nicht mehr als arithmetisches Mittel.) Die Faustregel: Im Bereich $\mu(X) \pm 2\sigma(X)$ liegen über 90 Prozent der Population.
- (d) $Y = X + 1$, also $\mu(Y) = \mu(X)$ und $\sigma(Y) = \sigma(X)$. Erster Aufmerker zu: σ ist nicht linear, im Gegensatz zu μ .
- (e) Gewöhnlich haben die Psychologiestudenten ein wesentlich erhöhtes Mittel in der Geschwisterzahl, entsprechend (das ist ein wichtiges Element des intuitiven Grundverständnisses) auch eine höhere Streuung. Sie können die Leute auch noch auffordern, sich den Unterschied zwischen der gegenwärtigen und der wilhelminischen Gesamtbevölkerung hinsichtlich der Variablen 'Geschwisterzahl' oder 'Kinderzahl' vorzustellen.
- (2) Man macht eine Tabelle (nach demselben Muster, wie schon in Aufgabe 1 verwandt):

Wert	0	1
Wahrscheinlichkeit	$1 - p$	p

und errechnet:

$$\mu(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p,$$

nun mit einer zweiten Tabelle

Wert von $(X - \mu(X))^2$	p^2	$(1 - p)^2$
Wahrscheinlichkeit	$1 - p$	p

$$\sigma^2(X) = p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p = p(1 - p)(p + 1 - p) = p(1 - p),$$

daher wird $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$. (Wichtiges Resultat für die später zu behandelnde Binomilaverteilung.) σ wird genau dann maximal, wenn σ^2 es wird. Schreibt man $p = \frac{1}{2} + \varepsilon$, mit $|\varepsilon| \leq \frac{1}{2}$, so hat man $p(1 - p) = (\frac{1}{2} + \varepsilon)(\frac{1}{2} - \varepsilon) = \frac{1}{4} - \varepsilon^2$, das wird also maximal für $\varepsilon = 0$, also $p = \frac{1}{2}$ - auch das wird später nützlich.

Zur Verallgemeinerung:

Es sollte intuitiv einleuchten, dass wiederum $p = \frac{1}{2}$ die maximale Streuung ergibt. Man kann μ auch im allgemeinen Fall ebenso leicht ausrechnen zu $a(1 - p) + bp = a + p(b - a)$. Für σ^2 (und dann σ) könnte man auch wieder die Tabelle anfertigen, aber das ist viel zu unbequem, besser macht man sich klar, dass bei fest vorgelegtem Wert von p die Verteilung gegenüber $a = 0$, $b = 1$ einfach mit Faktor $(b - a)$ gestreckt ist, also die Streuung entsprechend zu strecken ist, das macht $\sigma^2 = (b - a)^2 p(1 - p)$, $\sigma = (b - a) \sqrt{p(1 - p)}$.

- (3) Man rechnet etwa die Werte der zweiten Skala auf die erste um, mit der Umrechnungsformel $x' = \frac{5}{3}(x - 3)$, oder einigt sich auf eine dritte Skala, gleich welche. Entscheidend ist das lineare Transformieren.

- (4) Man hat (und das deutlich und 'todsicher'!) zu erwarten, dass $\mu(Z) < \mu(Y)$ und $\sigma(Z) < \sigma(Y)$. Denn man wird bei den Leuten, die in der ersten Klausur gut abgeschnitten haben, eine deutlich erhöhte Wahrscheinlichkeit dafür haben, dass dies auch bei der zweiten Klausur der Fall ist. Andererseits wird man in der gesamten Population eine große Spannbreite der Leistungen zwischen schlecht und gut erwarten.
- (5) (a) Dass man rein zufällig alle Antworten richtig gibt, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^{15}}$. Dass bei n Probanden kein einziges Mal voller Erfolg eintritt, hat die Wahrscheinlichkeit $(1 - \frac{1}{2^{15}})^n$. Setzen wir das gleich $\frac{1}{2}$, so erhalten wir keine ganzzahlige Lösung n , sondern etwa 22712.7. Also reicht die nächste ganze Zahl, $n = 22713$. Zur Lösung: Die Leute sollen ruhig mit dem Taschenrechner probieren, sich an die Lösung heranzutasten (zwischen 'zu klein - zu groß'). Bei Zeit und Interesse können Sie auch vormachen, wie Sie das mit Logarithmus machen würden:

$$n \ln \left(1 - \frac{1}{2^{15}} \right) = -\ln(2),$$

$$n = \frac{\ln(2)}{15 \ln(2) - \ln(2^{15} - 1)}.$$

- (b) Deprimierend einfach: Fordern Sie den Erfolgreichen nur auf, sich ein zweites Mal an derselben Aufgabe zu versuchen - er ist völlig chancenlos.
- (6) Dass beide Ereignisse eintreten können, besagt nichts über die Wahrscheinlichkeiten. Denken Sie etwa an 'Hauptgewinn im Lotto'. Es erscheint merkwürdig, dass man überhaupt auf einen solchen Unsinn kommen kann, aber er hat System: Es überlagern sich zwei Kategoriensysteme, hier einmal das rein logische: Logisch gültig sind weder A , noch \bar{A} , in diesem Sinne sind sie beide 'gleichwertig', nämlich nicht sicher, beide *können* eintreten. Aber Wahrscheinlichkeit misst feiner: Hinsichtlich ihrer Wahrscheinlichkeit können beide Ereignisse völlig ungleich sein. (Erschwerend - bzw. die erstaunliche Auffassung erleichternd - kommt hinzu, dass viele Menschen kaum daran gewöhnt sind, Verhältnisse quantitativ zu betrachten, es gibt ein großes Übergewicht von Qualitativem.)