Lösungen zur Aufwärmübung

(1) (a) $\frac{5}{12} - \frac{4}{15} = \frac{3}{20}$ (Hauptnenner 60, dann kürzen!)

(b) $-\frac{1}{12} \cdot \frac{6}{-8} = \frac{1}{16}$ (Kürzen und Vorzeichenbehandlung)

(c) (Doppelbruch sofort beseitigen und klarmachen, dass man die Sache leicht im Kopf ausrechnen kann)

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{-1}{3}} = \frac{6}{-5} = -\frac{6}{5}$$

(d) $\frac{3}{4a} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a}$ oder auch $\frac{3}{4a} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{a}$, natürlich auch weitere Möglichkeiten, die uninteressanter sind, etwa $\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{4a}$.

(e) $\frac{-3c-4a}{4abc} = -\frac{3c}{4abc} - \frac{4a}{4abc} = -\frac{3}{4ab} - \frac{1}{bc}$.

(f) Der Bruch $\frac{a}{b}$ sollte eindeutige Lösung der Gleichung $xb = a$ sein, und die ist eindeutig lösbar genau dann, wenn $b \neq 0$. Im Falle $b = 0$ hat man: Wenn $a = 0$, so ist jede reelle Zahl Lösung der Gleichung. Wenn $a \neq 0$, so besitzt die Gleichung überhaupt keine Lösung. Dagegen: Ist $b \neq 0$, so ist $\frac{0}{b} = 0$, da 0 die einzige Lösung von $xb = 0$ ist.

(2) $x - (2a - 3b + 4c) = x - 2a + 3b - 4c$

(3) $3x^2y^2 - 12x^4y^3 - 9x^3y^5 = 3x^2y^2\left(1 - 4x^2y - 3xy^3\right)$

(4) $(3a - b)(2a + b) + (3a - b)(-3a - b) = (3a - b)(-a) = -3a^2 + ab$

(5) (Man sollte so weit wie möglich im Kopf rechnen.)

$$\begin{aligned}
\frac{a^3b^{-2}}{a^{-3}b^3c^2} &= \frac{a^6b^5}{c^2}, \\
\frac{1}{a-\sqrt{5}} + \frac{2}{a+\sqrt{5}} &= \frac{a+\sqrt{5}+2a-2\sqrt{5}}{a^2-5} = \frac{3a-\sqrt{5}}{a^2-5}, \\
\frac{1}{\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}} &= \frac{1-a^2}{2}
\end{aligned}$$

(6) $2x - 3(x - 3) + x = 4(-x + 1)$ ist gleichwertig zu $4x = -5$, also zu $x = -5/4$. (Terme im Kopf aufsammeln!) Neben den Regeln der Klammerauflösung benötigt man vor allem das Distributivgesetz, das gerade das Zusammenfassen von Termen mit x erlaubt. Weiter noch die Regel, dass Summieren derselben Zahl auf beiden Seiten einer Gleichung die Gleichung bestehen lässt, schließlich Assoziativgesetz und Kommutativgesetz der Addition sowie die Tatsachen, dass $-a + a = 0$ und $0 + a = a$.

(7) $x\sqrt{2} - \left(2x + \sqrt{5}\right) = \sqrt{6}$ hat die eindeutige Lösung $x = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-2}$, völlig nach demselben Muster der vorigen Aufgabe, aber man kann eben die Wurzeln exakt nicht weiter ausrechnen oder zusammenfassen. (Allenfalls wäre mit Erweitern noch ein Nenner ohne Wurzel erreichbar, aber darauf wollen wir hier verzichten.)

(8) $\sqrt[3]{27} = 3$, denn $3^3 = 27$. $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$.

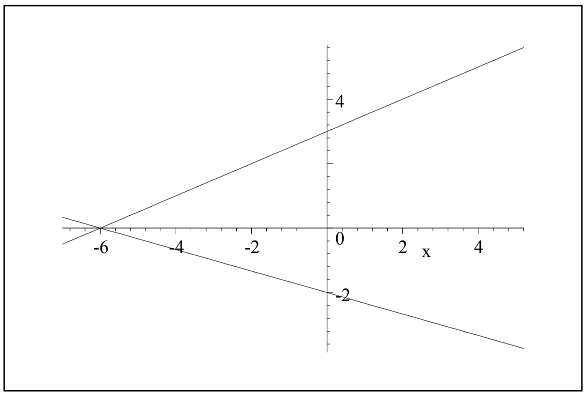
(9) $x^2 = 5$ hat die beiden Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$, $x^2 = -5$ hat keine reelle Lösung.

(10) Man denke daran, dass die Terme nach demselben Muster wie in Aufgaben 6 und 7 zusammenzufassen sind: Es entsteht die Gleichung $2x^2 - 12x + 1 = 0$, Division durch 2 führt auf Normalform $x^2 - 6x + \frac{1}{2} = 0$, Anwendung der Lösungsformel ergibt

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - \frac{1}{2}} = 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{17}$$

(11) Es ist die Gerade mit Steigung $-\frac{1}{3}$ ('Steigungsdreieck' sollte man bringen bzw. die Leute in Erinnerung rufen lassen), welche durch den Punkt $(0, -2)$ geht. Dann ist sie sofort zu zeichnen. Der Winkel ist der mit dem Tangenswert $-\frac{1}{3}$, mit dem Taschenrechner erhält man etwas mehr als 18 Grad. (Wir nehmen hier kein Bogenmaß.)

(12) Die Gleichung $-\frac{1}{3}x - 2 = \frac{1}{2}x + 3$ hat die eindeutige Lösung $x = -6$, also handelt es sich um den Punkt $(-6, 0)$. Das sollte man auch grob zeichnerisch prüfen. Der Winkel zwischen den Geraden (genauer einer der beiden Winkel) kann hier elementar überlegt werden nach der Skizze, die man zum vorigen Punkt schon zu machen hatte:



Es ist die Summe der beiden Winkel, also 45 Grad. Das bekommen wir hier allerdings nicht genau hin, sondern nur numerisch, da wir kein Skalarprodukt haben. Stattdessen sollten wir noch ein wenig überlegen, wie wir elementar das entsprechende Problem bei Vorliegen zweier Steigungen desselbe Vorzeichens (durch Differenzbildung zweier Winkel) lösen könnten.

(13) Der Mittelwert kann beliebig im Intervall $[x_1, x_n]$ liegen. Also $x_1 \leq \mathit{Mittelwert} \leq x_n$. Wenn nicht alle Zahlen gleichen Wert haben, so gilt genauer $x_1 < \mathit{Mittelwert} < x_n$. Insbesondere ist der Mittelwert ≥ 0, wenn alle Einzelwerte es sind. Diese Umstände sollte man ruhig intuitiv zu sehen wagen. Andererseits können wir das auch aus den Grundtatsachen folgern, dass:

$$\begin{aligned} \text{Wenn } x &< y, \text{ so } a + x < a + y \text{ für alle Zahlen } a, \\ \text{Wenn } x &\leq y, \text{ so } a + x \leq a + y \text{ für alle Zahlen } a. \end{aligned}$$

So folgt aus $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ zunächst $x_1 + x_1 \leq x_1 + x_2$, usw., schließlich $nx_1 \leq x_1 + ... + x_n$, woraus folgt $x_1 \leq \mathit{Mittelwert}$. Analog $nx_n \leq x_1 + ... + x_n$, also $x_n \geq \mathit{Mittelwert}$. Entsprechend folgt die strenge Ungleichung, wenn in der Reihe wenigstens eine strenge Ungleichung steht.