Erste Aufwärmübung

(1) Rechnen Sie aus:
   (a) $\frac{5}{12} - \frac{4}{15}$
   (b) $-\frac{1}{12} \cdot \frac{6}{-8}$.
   (c) Sie sehen den Hauptbruchstrich an der Höhe des Gleichheitszeichens (!); rechnen Sie aus:
$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{-1}{3}} =$$
   (d) Schreiben Sie $\frac{3}{4a}$ als Produkt - gibt es verschiedene Möglichkeiten, das zu tun?
   (e) Schreiben Sie den Bruch $\frac{-3c-4a}{4abc}$ als Summe zweier Brüche, und vereinfachen Sie.
   (f) Überlegen Sie, *warum* ein Bruch mit Nenner Null ein sinnloser Ausdruck ist (also nicht erst zu bilden), warum dagegen ein Bruch mit Nenner $\neq 0$ und Zähler Null einen wohlbestimmten Wert hat - welchen? Was ist nämlich der Sinn eines Bruches $\frac{a}{b}$? Welche Gleichung sollte er erfüllen und sogar eindeutig lösen? Wie steht es dagegen mit Brüchen, bei denen der Nenner verschieden von Null ist, der Zähler aber Null?

(2) Lösen Sie die Klammer auf: $x - (2a - 3b + 4c)$

(3) Klammern Sie so viel wie möglich aus: $3x^2y^2 - 12x^4y^3 - 9x^3y^5$.

(4) Vereinfachen Sie den Ausdruck $(3a - b)(2a + b) + (3a - b)(-3a - b)$. Hinweis: Ausklammern!

(5) Vereinfachen Sie die Ausdrücke:
$$\frac{a^3b^{-2}}{a^{-3}b^3c^2}, \quad \frac{1}{a-\sqrt{5}} + \frac{2}{a+\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a}}.$$

(6) Lösen Sie folgende Gleichung nach x auf (Unbestimmte x): $2x - 3\,(x - 3) = 4\,(-x + 1)$. Machen Sie sich bewusst, welche Rechenregeln Sie dabei benutzen.

(7) Lösen Sie folgende Gleichung nach x auf (exaktes Ergebnis, keine falsche Dezimalzahl!) $x\sqrt{2} - \left(2x + \sqrt{5}\right) = \sqrt{6}$.

(8) Was ist $\sqrt[3]{27}$? Kann man $\sqrt[3]{16}$ noch ein wenig (exakt!) vereinfachen?

(9) Welche reellen Zahlen sind Lösungen der Gleichung $x^2 = 5$? Und wie steht es mit reellen Lösungen der Gleichung $x^2 = -5$?

(10) Bringen Sie die Gleichung $x^2 - 6x + 3x^2 - 4x - 8 = 2x^2 - 3x + x + 9$, auf die Form $x^2 + px + q = 0$. Was sind im Beispiel die Werte von p, q? Geben Sie *alle* Lösungen der Gleichung an. Hinweis dazu: Wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, so gibt es zwei Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, und diese werden gegeben durch $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$. Wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, so gibt es nur die eine Lösung $x = -\frac{p}{2}$. Wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, so gibt es keine reelle Zahl x, welche die Gleichung löst. Wie steht es also im Beispielfall?

(11) Welche Gerade in der $xy-$ Ebene wird durch $y = -\frac{1}{3}x - 2$ beschrieben? Welche geometrische Interpretation haben die Zahlen $-\frac{1}{3}$ und 2 (bzw. -2) darin? Zeichnen Sie die zugehörige Gerade in ein Koordinatenkreuz ein. Welchen Winkel bildet die Gerade mit der $x-$ Achse?

(12) Welchen Schnittpunkt hat die Gerade, welche durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 3$ beschrieben ist, mit der Geraden aus Aufgabe 11? (Können Sie sogar etwas zum Winkel zwischen den Geraden sagen?)

(13) Sie haben n beliebige Zahlenwerte $x_1 \leq x_2 ... \leq x_n$, $n \geq 2$. Was können Sie über die Lage des arithmetischen Mittelwertes der Zahlen x_i, $1 \leq i \leq n$, sagen? (Das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist $\frac{1}{n}\,(x_1 + x_2 + ... + x_n)$ - es werden also alle Zahlen addiert und die Summe anschließend durch ihr Anzahl n geteilt). Was folgt insbesondere für den Mittelwert, wenn $x_i \geq 0$ für alle i gilt, $1 \leq i \leq n$?