Aufgaben zum Wochenende und Probeklausur

1. (a) Sei $\vec{x}_P = (2, 3, -4)$, und sei die Ebene E parametrisiert mit $\vec{x}_E\,(\lambda, \mu) = (1, 2, 2) + \lambda(2, -1, 3) + \mu(-1, 2, 2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   (i) Geben Sie eine Normalenform für E.
   (ii) Berechnen Sie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E.
   (iii) Die Ebene F liege parallel zu E zwischen P und E, so dass P nur halb so weit von F entfernt ist wie von E. Geben Sie eine Normalenform für F.
   (b) Vereinfachen Sie den Rechenausdruck $\left(2\vec{a} + \vec{b}\right)\left(\vec{a} + \left(\vec{c} \times \vec{b} - \vec{b} \times 2\vec{c}\right)\right)$.
   (c) (i) Berechnen Sie die Lösungsmenge von $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (ii) Was ist also (rechnen Sie nicht etwa erneut!) die Lösungsmenge von $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$?
   (iii) Mit derselben Matrix A: Geben Sie eine Parameterdarstellung für $\mathrm{Bild}(A)$, also die Menge aller Vektoren $A\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
2. Gegeben seien die Punkte A, B, C, D mit $\vec{x}_A = (2, -3, 1)$, $\vec{x}_B = (3, 1, 2)$, $\vec{x}_C = (4, 2, -2)$, $\vec{x}_D = (6, 10, 0)$.
   (a) Zeigen Sie, dass alle vier Punkte auf einer Ebene liegen.
   (b) Schneiden Sie die Strecke $\overline{AD}$ mit der Strecke $\overline{BC}$. Was folgt daraus geometrisch?
   (c) Berechnen Sie den Winkel des von den vier Punkten gebildeten Vierecks im Eckpunkt A.
   (d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks.
   e.*) Beschreiben Sie in Parameterform die Menge aller Punkte auf der Fläche des Vierecks einschließlich des Randes.
3. (a) Berechnen Sie in exakter kartesischer Endform: $\frac{3-2j}{1+4j}$, $-2e^{-20j\pi/6}$.
   (b) Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die Gleichung $\frac{2z+1+j}{3z-4j} = \frac{1}{j}$.
   (c) Sei $g(x) = 2\sin(4x) - 3\cos(4x)$, $x \in \mathbb{R}$.
   (i) Bringen Sie den Rechenausdruck zu g auf die Form $g(x) = A\cos(3x + \varphi)$.
   (ii) Geben Sie die Abszissenwerte aller Maxima von g an.
   (d) Skizzieren Sie grob den Graphen zu $f(x) = \frac{1}{\tan(2x-1)}$. Geben Sie dabei sorgfältig *quantitativ* alle Stellen an, bei denen der Ausdruck *formal* nicht definiert ist. Unterscheiden Sie zwei Sorten bei diesen Stellen, und begründen Sie das durchaus verschiedenartige Verhalten des Graphen bei den zwei Sorten.
   e.*) Versuchen Sie sich an einer Parameterdarstellung für eine Kurve, die (qualitativ) so aussieht: