Einige nützliche Hinweise zur logischen Beweglichkeit

Es gibt wichtige Verknüpfungen von Aussagen zu neuen Aussagen, und es gibt wichtige logische Beziehungen zwischen Aussagen. Beide sind unerlässlich für das ordentliche Argumentieren bereits bei einfachen Sachverhalten, erst recht bei komplizierteren. Man hat Definitionen und Resultate allgemeiner Art - was kann man daraus schließen, was nicht?

Es geht hier nicht etwa um Vollständigkeit - dazu existiert sogar ein Resultat der Art, dass solche Vollständigkeit nicht einmal logisch möglich ist. Aber es gibt ein paar einfache logische Sachverhalte und Regeln, deren Anwendungen stets sehr nützlich sind und der Fruchtbarkeit und Genauigkeit des Denkens dienen, vor naiven Fehlschlüssen bewahren.

1 Aussagenlogische Verknüpfungen von Aussagen zu zusammengesetzten Aussagen, zugehörige Grundtatsachen und Regeln

Eine Aussage stellt einen Sachverhalt dar. Wenn der zugehörige Sachverhalt besteht, ist die Aussage wahr, sonst falsch. Wir reden nur von Aussagen, die eindeutig entweder wahr sind oder falsch, genau eines von beiden. Jede Aussage darf schon zusammengesetzt sein aus Aussagen. Die aussagenlogischen Verknüpfungen besprechen wir nun etwas. Bezeichnen wir Aussagen mit A, B, C usw.

1.1 Verneinung, 'und'- und 'oder'-Verbindung von Aussagen, 'wenn - dann' - und 'genau dann, wenn' - Verbindungen von Aussagen

1. Zu jeder Aussage A gibt es die Aussage '*nicht A*', symbolisch bezeichnet mit $\neg A$, und $\neg A$ ist definitionsgemäß genau dann wahr, wenn A falsch ist.

2. Zu zwei Aussagen A und B (wie stets in der Mathematik darf auch $A = B$ sein) existiert stets die Aussage '*A und B*', symbolisch $A \wedge B$. Diese ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

3. Zu zwei Aussagen A und B existiert stets die Aussage '*A oder B*', symbolisch $A \vee B$. Diese ist genau dann wahr, wenn *mindestens* eine der beiden Aussagen A und B wahr ist. Das ist das sogenannte 'nicht-ausschließende' 'oder'.

4. Zu zwei Aussagen A und B existiert stets die Aussage '*Wenn A, so B*', symbolisch $A \Longrightarrow B$. Diese ist genau dann wahr, wenn A falsch oder B wahr ist. Nach dem Vorangehenden könnte man auch $A \Longrightarrow B$ als Abkürzung für $\neg A \vee B$ verstehen. Hier verwenden wir eine Regel zur Klammer-Ersparnis: '$\neg$' bindet stärker als alle anderen Verknüpfungen.

5. Zu zwei Aussagen A und B existiert stets die Aussage '*A genau dann, wenn B*', symbolisch $A \Longleftrightarrow B$. Diese ist genau dann wahr, wenn die Aussagen A und B denselben Wahrheitswert haben, also entweder beide wahr oder beide falsch sind.

1.2 Zum Grundverständnis von 'wenn, so' bzw. $\Longrightarrow$ und die Abtrennungsregel

Anfänger haben gewöhnlich gewisse Schwierigkeiten, die 'wenn, so' - Verbindung richtig zu würdigen. Das liegt daran, dass sie nur an Aussagen denken, von denen man leicht sagen kann, ob sie wahr oder falsch sind. Logik braucht man aber gerade dann, wenn es komplizierter wird. Man denke an den wichtigen Fall, dass es schwierig ist, von einer Aussage A festzustellen, ob sie wahr oder falsch ist. Dann geht man gewöhnlich so vor, dass man versucht, eine leichter prüfbare Aussage B zu finden, für die man zeigen kann: $A \Longrightarrow B$. Wenn nun B als falsch erwiesen werden kann, dann ist logisch klar: A ist falsch! Man hat also folgende gültige

Schlussregel (modus tollens)

$A \Longrightarrow B$	Erste Voraussetzung
$\neg B$	Zweite Voraussetzung
――――――	
$\neg A$	Folgerung

Weiter denke man daran, dass etwa A eine sehr fundamentale *wahre* allgemeine Aussage ist und man für eine interessante Aussage B zeigen kann: $A \Longrightarrow B$. Dann gilt B. Das ist die wichtigste logische Regel überhaupt, modus ponens oder Abtrennungsregel:

Abtrennungsregel (modus ponens)	
$A \Longrightarrow B$	Erste Voraussetzung
A	Zweite Voraussetzung
−−−−−−	
B	Folgerung

Allein daraus, dass diese Regel gültig sein sollte, kann man bereits ermitteln, wann genau die Verbindung $A \Longrightarrow B$ wahr sein sollte, wenn man fordert, dass $A \Longrightarrow B$ die *schwächste* Bedingung dafür liefern sollte, dass zusammen mit A auf B geschlossen werden kann. Dazu muss $A \Longrightarrow B$ genau bedeuten: A ist falsch oder B ist wahr. Denn wenn A falsch ist, so ist die zweite Voraussetzung der Regel nicht erfüllt, man kann also nichts nach ihr über B sagen. Ist dagegen A wahr, so muss auch B wahr sein. Man kann sich auch recht gut mit folgender sprachlichen Formulierung für $A \Longrightarrow B$ helfen: $A \Longrightarrow B$ bedeutet: A ist eine *hinreichende* Bedingung für B. Mit $A \Longrightarrow B$ reicht also die Wahrheit von A für die von B (Abtrennungsregel!). Oder auch: $A \Longrightarrow B$ bedeutet: B ist eine *notwendige* Bedingung für A, d.h.: Wenn nicht B, so auch nicht A (modus-tollens-Regel!).

1.3 Wahrheitstafeldefinitionen der aussagenlogischen Verknüpfungen

A	$\neg A$
W	F
F	W

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Hiermit ist für jede Wahrheitswerteverteilung auf A und B gesagt, was die zugehörigen Wahrheitswerte der aussagenlogischen Verknüpfungen sind. Damit kann man dann auch die Wahrheitswerte für beliebig komplizierte Zusammensetzungen ermitteln. Ein kleines Beispiel:

A	B	C	$B \Longrightarrow C$	$A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$	$(A \wedge B) \Longrightarrow C$
W	W	W	W	W	W
W	W	F	F	F	F
W	F	W	W	W	W
W	F	F	W	W	W
F	W	W	W	W	W
F	W	F	F	W	W
F	F	W	W	W	W
F	F	F	W	W	W

Man stellt fest: Für alle Wahrheitswerteverteilungen der Bestandteile haben $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$ und $(A \wedge B) \Longrightarrow C$ denselben Wahrheitswert. Solche Verbindungen heißen **logisch äquivalent**. Wie man sieht, bedeutet dies genau, dass die Verbindung

$$(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \Longrightarrow C$$

logisch allgemeingültig ist, das heißt, sie hat stets den Wahrheitswert 'wahr', unabhängig von der Wahrheitswerteverteilung der Bestandteile.

1.4 Einige wichtige aussagenlogische Äquivalenzen, insbesondere Verneinungstechnik

$$\begin{aligned} \neg & \neg A \text{ äquivalent zu } A \\ \neg & (A \vee B) \text{ äquivalent zu } \neg A \wedge \neg B \\ \neg & (A \wedge B) \text{ äquivalent zu } \neg A \vee \neg B \\ \neg & (A \Longrightarrow B) \text{ äquivalent zu } A \wedge \neg B \\ A \Longrightarrow & B \text{ äquivalent zu } \neg B \Longrightarrow \neg A \end{aligned}$$

All das kann man mittels Wahrheitstafeln sofort nachprüfen, aber man sollte es auch mit sprachlicher Formulierung intuitiv verstehen. Die letztgenannte Äquivalenz ist übrigens die Grundlage für den sogenannten 'indirekten Beweis'.

1.5 Grundlegendes über 'für alle' und 'es gibt'

Hier gehen wir über die aussagenlogischen Verbindungen hinaus. Wenn man hat: 'Für alle reellen Zahlen x gilt: $x^2 \geq 0$', so kann man logisch schließen: $(-2)^2 \geq 0$. Aber das beruht auf keinerlei aussagenlogischer Verknüpfung, sondern eben auf der Logik von 'für alle'. Hier sind ohne Rücksicht auf Vollständigkeit erst einmal die wichtigsten Regeln. Man denke beim inhaltlichen Verständnis von 'es gibt ein ...', dass stets gemeint ist: 'mindestens ein ...', nicht etwa 'genau ein ....'. Weiter sei nunmehr $\alpha(x)$, was man eine Aussageform mit der freien Variablen x nennt; setzt man für x einen Ausdruck für ein konkretes Objekt aus dem Bereich ein, über den man spricht, so entsteht eine Aussage daraus. Beispiel: $x < 3$ ist weder wahr noch falsch, setzt man aber 2 für x ein, so entsteht eine wahre Aussage. Setzt man 3 ein, so entsteht eine falsche Aussage. Weiter bezeichnen wir mit t irgendeinen Rechenausdruck, der ebenfalls noch beliebige freie Variablen enthalten kann - oder aber auch eine Konstante sein kann bzw. ein Name für ein konkretes Objekt. Und mit $\alpha(x/t)$ bezeichnen wir die Aussageform, die entsteht, wenn man für x den Ausdruck t einsetzt. Nun haben wir mit der Symbolik $\forall x \alpha(x)$ für: 'Für alle x gilt $\alpha(x)$' und $\exists x \alpha(x)$ für: 'Es gibt ein x, so dass $\alpha(x)$' die Grundregeln:

$$\begin{array}{cc} \forall x \alpha(x) & \text{Voraussetzung} \\ ------- & \\ \alpha(x/t) & \text{Folgerung} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{cc} \alpha(x/t) & \text{Voraussetzung} \\ ------- & \\ \exists x \alpha(x) & \text{Folgerung} \end{array}$$

Das ist eigentlich recht verständlich: Wenn etwas für alle gilt, so für jedes Einzelne. Die erstgenannte Regel kennzeichnet die typische Verwendung einer vorauszusetzenden Allaussage: Einsetzen von Termen, es entsteht wieder etwas Wahres. Wenn etwas für ein bestimmtes Objekt gilt, so gibt es eben auch eines, für welches dies gilt. Auch bei den Partikeln 'für alle' und 'es gibt' ist wieder Verneinungstechnik wichtig:

$$\begin{aligned} \neg & \forall x \alpha(x) \text{ äquivalent zu } \exists x \neg \alpha(x) \\ \neg & \exists x \alpha(x) \text{ äquivalent zu } \forall x \neg \alpha(x) \end{aligned}$$

Hier ein substantielles Beispiel: 'Alle Linearkombinationen von $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$, welche $\vec{0}$ ergeben, sind trivial' hat die Verneinung: 'Es gibt eine Linearkombination von $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$, welche den Nullvektor ergibt und nichttrivial ist'.

1.6 Zwei Feinheiten zu 'für alle' und 'es gibt', die beweistechnisch sehr wichtig sind

Wie beweist man typisch eine Allaussage? Man sagt: 'Sei x ein beliebiges Objekt aus dem Bereich ...'. Dann beweist man unter Benutzung der zur Verfügung stehenden allgemeinen mathematischen Voraussetzungen $\alpha(x)$. Nun schließt man, da man nichts Spezielles über x vorausgesetzt hat: $\forall x \alpha(x)$. (Prägnante Formulierung: Was für ein beliebiges Objekt gilt, das gilt eben für alle.) Wie nutzt man typisch in Beweisen eine Existenzaussage

$\exists x \alpha(x)$? Man sagt: Sei x_0 so, dass $\alpha(x_0)$. Man führt also einen Namen (eine Konstante) für eines der Objekte an, das $\alpha(x)$ erfüllt. Man darf nun nichts weiter über x_0 voraussetzen als $\alpha(x_0)$ sowie natürlich alle allgemein schon bewiesenen Eigenschaften. Wie beweist man typisch eine Existenzaussage der Form $\exists x \alpha(x)$? In aller Regel konstruiert man ein Beispiel x_0, so dass $\alpha(x_0)$, und dann verwendet man die obenstehende Regel, nach der man auf $\exists x \alpha(x)$ schließen kann.