Aufgaben zum Wochenende (3)

Erster Block: Wiederholungen zur Vektorrechnung

(1) (a) $(2,1,1)\cdot(1,-1,-1)=0$, also steht der abzulesende Richtungsvektor von g senkrecht auf dem abzulesenden Normalenvektor von E. Der gefragte Abstand ist der des Punktes $(1,2,3)$ (wie jedes andern Punktes von g) von E, also hat man mit $(1,2,3)\cdot(1,-1,-1)=-4$ das Resultat $\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

(b) Für die Frage wird nur ein Normalenvektor für F benötigt, man erhält $(1,2,-1)\times(3,1,1)=(3,-4,-5)$, also hat man $\arccos\left(\frac{12}{\sqrt{50}\sqrt{3}}\right)$ zu bilden, das ist etwa 0.201, ungefähr 11. 5 Grad. Zur Übung schreibe man auch eine Normalenform für F: $3x-4y+5z=0$.

(c) Beschreibung der Bewegung (nach Kenntnis der allgemeinen Flugparabel):

$$\vec{x}\,(t)=(1,2,2)+t\,(2,3,3)+\frac{1}{2}t^2\,(1,1,-3)\,,\ t\in\mathbb{R}.$$

Für den Schnitt der Bahn mit E hat man die Bedingung (man versetze sich unbedingt in die Lage, folgende Gleichung sofort hinschreiben zu können - das geht leicht, wenn man im Kopf ordnet und der Reihe nach behandelt: zuerst die t^2- Glieder, nun lediglich mit den Koeffizienten $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}$ zu rechnen, usw.):

$$\frac{3}{2}t^2-4t-3=1,$$

Normalform

$$t^2-\frac{8}{3}t-\frac{8}{3}=0,$$

mit zwei reellen Lösungen $t_{1,2}=\frac{4}{3}\pm\frac{2}{3}\sqrt{10}$. Die Ebene wird also in den Punkten $\vec{x}\,(t_{1,2})$ durchstoßen. (Damit ist die Aufgabe so weit gelöst - die Koordinatendarstellungen der Schnittpunkte erhält man zweckmäßig mit geeignetem Computerprogramm, das ist für uns langweilig und bildet nicht, hier die Resultate zum Vergleich: Das ist für $t_1=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{10}$ der Punkt $\left(\frac{61}{9}+\frac{20}{9}\sqrt{10},\frac{82}{9}+\frac{26}{9}\sqrt{10},-\frac{10}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$, für $t_2=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{10}$ ergibt sich $\left(\frac{61}{9}-\frac{20}{9}\sqrt{10},\frac{82}{9}-\frac{26}{9}\sqrt{10},-\frac{10}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$.)
Zum jeweiligen Winkel des Auftreffens: Man rechnet (wie immer) am besten allgemein symbolisch und setzt erst im letzten Moment Konkretes ein: Zu bilden ist (für $t=t_{1,2}$), mit Normalenvektor $\vec{n}$ für E:

$$\sin\alpha=\frac{\vec{x}'(t)\cdot\vec{n}}{|\vec{x}'(t)|\,|\vec{n}|}.$$

Nun haben wir $\vec{x}'(t)=(2,3,3)+t\,(1,1,-3)$, also

$$\sin\alpha=\frac{-4+3t}{\sqrt{16+9t^2}\sqrt{3}}$$

Dies ist nun für $t_{1,2}$ zu bilden, arcsin anzuwenden, fertig. (Die Lösung der gestellten Aufgabe besteht in einer solchen Beschreibung, wieder kann man dann mit dem Computer ganz bequem die Bogenmaße ausrechnen, man erhält etwa 0.336 und 0.91.)

(2) $-30v$, dazu nur die Faktoren herausziehen und das Vorzeichen der Vertauschung anbringen.

(3) Sei (x,y) irgend ein Punkt der Ellipse - das Paar erfüllt also die Ellipsengleichung. Dann haben wir zu zeigen:

$$\left|\begin{pmatrix} x-\sqrt{a^2-b^2} \\ y \end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix} x+\sqrt{a^2-b^2} \\ y \end{pmatrix}\right|$$

ist unabhängig vom speziellen Ellipsenpunkt (sollte sich also in den Parametern a,b ausdrücken). Wir rechnen das aus, es kommt:

$$\sqrt{x^2-2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2+y^2}+\sqrt{x^2+2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2+y^2},$$

nun können wir gemäß erfüllter Ellipsengleichung einsetzen: $y^2 = b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2}$ und erhalten:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x\sqrt{a^2-b^2} + a^2 - b^2 + y^2 &= x^2\frac{a^2-b^2}{a^2} - 2x\sqrt{a^2-b^2} + a^2 \\
&= \left(a - x\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)^2,
\end{aligned}
$$

analog erhalten wir für den Ausdruck unter der andern großen Wurzel:

$$
\left(a + x\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)^2,
$$

die Summe der Wurzeln ist also $2a$. Die andere Halbachse spielt hier nicht mit, wie man durch Betrachtung des Ellipsenpunktes $(a,0)$ bestätige, für den offenbar bei der Summe beider Abstände die Zahl $2a$ herauskommt.

Zweiter Block: Zu den komplexen Zahlen

(1) $\frac{3-4j}{2-3j} = \frac{18}{13} + \frac{1}{13}j$, $2e^{-j\pi/3} = 1 - j\sqrt{3}$

(2) Lösung $z = -\frac{5}{6} - \frac{7}{6}j$.

(3) Mit $z = a + jb$ hat man $z + j\overline{z} = a + b + j\,(a+b)$, damit bekommt man offenbar alle Punkte auf der Diagonalen $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)$, so dass man natürlich mit einem Parameter auskommt und $z(t) = t + jt$, $t \in \mathbb{R}$, eine geeignete Parametrisierung ist.

Dritter Block: Zu den Funktionen

(1) Ableitung ist $\frac{\cos x}{2\sqrt{\frac{1}{100}+\sin x}}$, also Näherung erster Ordnung: $\frac{1}{10} + \frac{1}{20}x$ (für kleine $|x|$, beachten Sie, dass x hier damit die Rolle spielt, die sonst von Δx eingenommen wird.) Der gesuchte relative Fehler ist

$$
\frac{\sqrt{\frac{1}{100} + \sin\left(\frac{1}{200}\right)} - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{400}\right)}{\sqrt{\frac{1}{100} + \sin\left(\frac{1}{200}\right)}} \approx 0.163,
$$

und der ist unangenehm groß, was sich durch die große Steigung der Wurzelfunktion nahe Null und den kleinen korrekten Funktionswert erklärt.

(2) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung von $\sqrt{\frac{1}{100} + \sin(x)}$ für kleine Beträge von x. Welchen relativen Fehler haben Sie für $x = -\frac{1}{200}$ bei dieser Näherung?

(3) $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, also einfacher Sinus, nur doppelte Kreisfrequenz und halbe Amplitude.

(4) $\frac{d}{dx}\sin^3(x) = 3\cos(x)\sin^2(x)$, Nullstellen sind die von sin und die von cos, aber nur bei den Letzteren hat man Vorzeichenwechsel, also sind die Ersteren Sattelpunkte. Minima dort, wo cos vom Negativen ins Positive wechselt, Maxima an den andern Nullstellen von cos. Dies kann man allein mit der Ableitung ablesen, natürlich ist es auch elementar klar, dass man eine ungerade Funktion vor sich hat und dass die Maxima und Minima genau an den Stellen sind, wo die innere Funktion sie hat - es handelt sich um eine streng monoton steigende äußere Funktion. Beim Zeichnen beachte man die Periodizität, die allein von der inneren Funktion bestimmt wird, Gipfel und Täler schmaler als bei sin, flache Nulldurchgänge - ein Bereich wie $[-\pi, \pi]$ genügt. Hier ein Bild mit sin zum Vergleich:$\sin x$

$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = -\frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$, also ist die Funktion für $x > 1$ streng monoton fallend, vom Pol bei $x = 1$ asymptotisch zu Null. Gerade Funktion! Undefiniert im Bereich $[-1, 1]$.
$\frac{d}{dx}\frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$, Nenner nicht ausmultiplizieren! Nullstelle der Ableitung allein bei $x = 0$, dort liegt ein Sattel vor (Vorzeichen der Ableitung wechselt nicht). Die Funktion ist nicht etwa ungerade. Pol bei $x = -1$, Nullstelle bei $x = 1$, wesentlich die Vorzeichenüberlegung für die Funktion selbst: Rechts vom Pol unmittelbar: Negativ, kommt also von $-\infty$, mit fallender Steigung bis zur Flachstelle bei $x = 0$, dann wieder steiler, aber nur asymptotisch gegen den Wert 1 von unten. Links vom Pol unmittelbar: Positive Werte, also vom Pol *nach links* abfallend (Ableitungswerte dort überall positiv, nach links hin fallend), asymptotisch wieder gegen den Wert 1, aber von oben. Man braucht für das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$ hier nicht Polynomdivision durchzuführen, was $\frac{x^3-1}{x^3+1} = 1 - \frac{2}{x^3+1}$ ergibt, sondern es genügt, die additiven Konstanten in Zähler und Nenner zu vernachlässigen. Die horizontale Asymptote ist eingezeichnet, ebenso sollte man den Pol gestrichelt markieren. Die genaue Zeichnung hier nur, um einmal zu sehen, dass nach dem theoretischen Verständnis der Funktion nichts mehr zu wünschen bleibt und der Graph keinerlei Überraschung mehr zeigt.

(5) $\frac{d}{dx}xe^{\alpha x} = e^{\alpha x}(1 + \alpha x)$, einzige Nullstelle der Ableitung bei $x = -\frac{1}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$. In jedem Falle Steigung 1 bei $x = 0$, dort berühren sich demnach alle Graphen. Für $\alpha = 0$ Offenbar der Sonderfall der Geraden, $f_0(x) = x$. In den andern Fällen: Für $\alpha > 0$ Minimum, für $\alpha < 0$ Maximum (Vorzeichenwechsel der Ableitung!), und man kann noch feststellen, dass die Graphen zu α und $-\alpha$ punktsymmetrisch zueinander liegen. Vorzeichenbetrachtung bei der Funktion selbst sowie klare Dominanz des Exponentialfaktors bei $\alpha \neq 0$ klären den Rest, hier die drei Typen, gewählt

sind $\alpha = -1, 0, 1$, dazu noch $\alpha = 5$, um den Parametereinfluss zu illustrieren: Die Ableitung lehrt bereits, dass für kleine Beträge von α die Extrema weit weg von $x = 0$ liegen, für große Beträge von α dagegen beliebig nahe zum Ursprung wandern (in beiden Koordinaten). Weiter sind für kleine Beträge von α die Abstände der Hoch- bzw. Tiefpunke zur $x-$ Achse groß. In der folgenden Zeichnung: Rot ist der Graph von xe^{5x}, grün der zu xe^{-5x} (bei ihm wird erst in breiterem Bereich das geschilderte Verhalten voll sichtbar).

(6) Nach Kenntnis von $\sin(1/x)$ sollte $\tan(1/x))$ naheliegen.

Übung (13)

(1) Es ist $f'(x) = \frac{4\sin x\cos x + \sin^2 x\cos x + 2\sin x + 1}{(2+\sin x)^2}$, also $f'(\pi/2) = \frac{1}{3}$. Absoluter Fehler bei Näherung durch Differenzenquotienten ist etwa 0.003, relativer etwas mehr als 0.008, also unter 1%.

(2) Es genügt, die Sache für $\beta = 0$ zu betrachten, dann braucht man nur noch den Graphen längs der $x-$ Achse zu verschieben. Man überlegt: Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$, alle Werte sind in $]0,1[$, für $x \to -\infty$ gehen die Werte nach Null, für $x \to \infty$ gegen 1. Die zweite Ableitung ist $\frac{d^2}{dx^2}\frac{e^x}{1+e^x} = e^x\frac{1-e^x}{(1+e^x)^3}$, einzige Nullstelle ist $x = 0$. Der Vorzeichenwechsel zeigt, dass dort die Steigung maximal ist, also ein Wendepunkt. Man sieht auch elementar, dass es mindestens einen Wendepunkt geben muss, der dann bei der einzigen Nullstelle der zweiten Ableitung zwangsläufig liegt. Eine grobe Skizze legt die Vermutung nahe, dass Punktsymmetrie zu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ vorliegt, da der Wendepunkt die $y-$ Koordinate $\frac{1}{2}$ hat. Zur Bestätigung zeigen wir, dass $h(x) = g_0(x) - \frac{1}{2}$ eine ungerade Funktion ist:

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{e^{-x}-1}{2\left(1+e^{-x}\right)}, \\ h(x) &= \frac{e^{x}}{1+e^{x}} - \frac{1}{2} = \frac{e^{x}-1}{2\left(1+e^{x}\right)} = \frac{1-e^{-x}}{2\left(e^{-x}+1\right)} \end{aligned}$$

(Erweitert mit e^{-x}, um mit obenstehendem Ausdruck vergleichen zu können.) Also $h(-x) = -h(x)$ wie versprochen. Somit hat g_β einen (einzigen) Wendepunkt bei $x = \beta$, und der Graph liegt punktsymmetrisch zu $\left(\beta, \frac{1}{2}\right)$.

(3) (a) $f(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$ ist die gesuchte Funktion.

(b) $g_0'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, $f'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, somit geht die Ableitung von g_0 wesentlich schneller nach Null, der Graph nähert sich entsprechend schneller dem Grenzwert, sowohl für $x \to \infty$ als auch für $x \to -\infty$. Man kann noch die jeweiligen Differenzen betrachten und etwa sehen, dass $\frac{1-g_0(x)}{1-f(x)} \to 0$ für $x \to \infty$. Das ist mit de L'Hospitalscher Regel sofort klar (kann man aber auch 'mit bloßem Auge' sehen): $\frac{-g_0'(x)}{-f'(x)} = \frac{e^x\pi\left(1+x^2\right)}{(1+e^x)^2} < \frac{\pi\left(1+x^2\right)}{e^x} \to 0$, was man wieder durch noch Zweimaliges Anwenden der Regel bekommt.

(4) Dominanz des Faktors x für $x \to 0$, also gehen die Werte nach Null. Auch das geht mit de L'Hospital: $\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$. Fragt sich nur, wie die Steigungen für $x \to 0$, weiter für die Nullstelle $x = 1$ sowie für $x \to \infty$ aussehen. Es ist $\frac{d}{dx}(x\ln x) = \ln x + 1$, also geht die Steigung gegen $-\infty$ für $x \to 0$, sie hat den Wert 1 bei $x = 1$, und sie geht (langsam, eben wie ln) nach ∞ für $x \to \infty$. Das (nach grober Skizze notwendige) Minimum liegt bei $x = e^{-1}$ (einzige Nullstelle der Ableitung).

(5) Die $x-$ Komponenten der Kurvenpunkte liegen in $]0,1]$, Aufmalen gegen t ergibt eine glockenförmige Kurve. Derweil steigen die $y-$ Komponenten von $-\infty$, erreichen Null bei $t = -1$, steigen ein wenig ins Positive, sinken auf Null ($t = 0$), fallen ein wenig ins Negative, steigen über Null ($t = 1$) dann ins Unendliche, gemäß dem Graphen von $t \mapsto t^3 - t$. Die Bahn liegt symmetrisch zur $x-$ Achse, $\vec{x}(-t)$ liegt jeweils spiegelsymmetrisch bezüglich dieser Achse zu $\vec{x}(t)$. Also brauchen wir nur für $t = 0$, $t = 1$ die Winkel auszurechnen. Für $t = 0$: $\vec{x}'(0) = (0, -1)$, dort geht es senkrecht durch die $x-$ Achse. $\vec{x}(1) = (-1, 2)$, der Winkel ist $\arctan(2)$, etwa 1.11 im Bogenmaß oder etwas mehr als 63 Grad. Hier ist ein Bild, mit kartesischem System, die Winkel zu sehen:

(6) (a) Regel nicht anwendbar, sondern es liegt ein einfacher Fall vor, der Grenzwert ist $-\infty$ bei Näherung von links, ∞ bei Näherung von rechts, also gibt es keinen Grenzwert. Fälschliche Beanspruchung der Regel ergäbe das falsche Resultat $\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0$.

(b) $\frac{1-\cos^2(x)}{\tan^2(x)} = \cos^2 x$, also Grenzwert 1. Das ergibt auch die Regel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\tan^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\tan(x)\left(1+\tan^2(x)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos^2 x}{1+\tan^2 x} = 1$$

Übung (14)

(1) Man hat $\ln(1) \leq 1$, also genügt nach diesem Satz, dass $\frac{d}{dx}\ln(1+x) \leq \frac{d}{dx}x$. Das bedeutet: $\frac{1}{1+x} \leq 1$, was offensichtlich für alle Werte von $x \geq 0$ gilt. Man benötigt zur Anwendung des Satzes, dass beide Funktionen auf $[0,\infty[$ differenzierbar sind - damit sind sie insbesondere in jedem abgeschlossenen Intervall $[0,a]$, $a > 0$, stetig. (Bemerkung: Im Aufgabentext war '$x \geq 0$' gemeint, nicht '$x \geq 1$', was die Sache nicht falsch macht, aber eine unmotivierte Einschränkung darstellt.

(2) Mit der Ableitung sieht man keinen Vorzeichenwechsel bei den Nullstellen, $1+\cos x = 0$ bedeutet $\cos x = -1$, also liegen keine Extrema vor, sondern nur Sättel (bei den Minimumstellen von cos, also $x(k) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, k ganz). So schlängelt sich die Funktion hoch, entlang der Geraden $y = x$. Der Mittelwertsatz verspricht wenigstens eine Stelle ξ im Intervall $[0,2\pi]$, wo die mittlere Steigung 1 (das rechne man nach!) lokal realisiert wird. Man findet aber graphisch zwei davon, und das sind die Lösungen der Gleichung

$$1 + \cos(x) = 1,$$

also sind es die beiden Nullstellen von cos im Intervall, $\pi/2$ und $3\pi/2$.

(3) Skizze zeigt die Lage, ein wenig kleiner als Null sollte die einzige Lösung sein. Start des Verfahrens mit $x_0 = 0$ liefert mit der konkretisierten Rekursionsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x + e^x}{1 + e^x}$$

den (gerundeten) Wert $x_2 = -0.566311$, es stimmen die ersten beiden Nachkommastellen; das ist schon beachtlich, aber $x_3 = 0.567143$ ist bereits auf 6 Stellen hinter dem Komma genau. Der Fehler bei x_2 ist etwa 1/1000. Man kann zum Beispiel prüfen: $e^{x_2} + x_2 > 0$, aber $e^{-0.568} - 0.568 < 0$. Damit weiß man, dass der Fehler unter 2/1000 liegt.

(4) Wir stellen die zugehörige Flugparabel auf (nur der Bereich $t \geq 0$ interessiert):

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}, \ t \geq 0.$$

Nullsetzen der $y-$ Komponente ergibt die Gleichung

$$t^2 - t\frac{2\sin\alpha}{g} - \frac{2h}{g} = 0$$

mit der einzigen positiven Lösung

$$t_1 = \frac{\sin\alpha}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{\sin^2\alpha + 2gh}.$$

Damit ist die Flugweite

$$t_1 \cos\alpha \text{ (erste Komponente des Auftreffpunktes).}$$

(Dazu beachten: $0 \leq \alpha < \pi/2$.) (Bis hierher war allgemein zu rechnen!) Speziell für $h = 0$ erhält man

$$t_1 = \frac{2\sin\alpha}{g},$$

damit die Flugweite als Funktion des Winkels:

$$f(\alpha) = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{\sin(2\alpha)}{g}.$$

Auch ohne Ableitung sieht man, dass das maximal wird für $\alpha = \pi/4$ (einzige Lösung im betrachteten Bereich!) Man beachte noch, dass die maximal erreichbare Flugweite umgekehrt proportional zu g ist. Nun ist der genannte Winkel ein Resultat, das man intuitiv erwarten würde - vielleicht auch fälschlich für $h > 0$!. Aber *der allgemeine Fall mit* $h > 0$ ist nicht so klar. Wohl kann man qualitativ etwa überlegen, dass der Winkel eher etwas flacher sein sollte bei erhobenem Abwurfpunkt, aber kein genaues quantitatives Resultat vermuten. Allgemein haben wir die Flugweite

$$f_h(\alpha) = \frac{1}{g}\left(\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sqrt{\sin^2\alpha + 2gh}\right).$$

Das sollte man so weit aufschreiben können und wieder dieselbe Abhängigkeit von g bemerken. Zur Lösung des Extremwertproblems kann man zunächst den positiven Faktor $1/g$ weglassen und dann für $\sin\alpha$ die neue unabhängige Variable $x = \sin\alpha$ einführen, es ergibt sich die Funktion

$$\begin{aligned} g(x) &= x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2+2gh}, \text{ mit} \\ g'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+2gh} - 2x^2\sqrt{x^2+2gh} - 2x^3 - 2xgh + x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2+2gh}} \end{aligned}$$

Wo wird das Null? Es kommt nur auf den Zähler an, und man findet: $x = \frac{1}{\sqrt{2+2gh}} = \sin\alpha$, also den geringeren optimalen Abwurfwinkel für $h > 0$ genau quantifiziert. Man sehe noch, dass für $h = 0$ wieder das alte Resultat kommt.

(5) Die grobe (obere) Schranke über Rechteck: $(e-1)\ln^2(e) = e-1$, die bessere: $\frac{1}{2}(e-1)\left(\ln^2(e) - \ln^2(1)\right) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$ (über das Sehnendreieck, konvexe Funktion). Untere Schranke natürlich mit Rechteck entsprechend, den minimalen Wert benutzend, das gibt Null. Für ein Dreieck hätte man etwa eine Tangente zu bilden, zweckmäßig im Punkt $\left(\frac{1+e}{2}, \ln^2\left(\frac{1+e}{2}\right)\right)$.

(6) $\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^5$ ist Ausdruck einer ungeraden Funktion, also ist das Integral Null über den symmetrischen Bereich.

(7) $\int_{-1}^{1} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}$

Übung (15)

(1) Wissen: $f(t) = f(0) + \int_0^t (3t + \sin(2t))\,dt = 1 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\cos(2t)$

(2) Mittelwert ist 5, mal Intervallbreite π, also $(5 + \cos(2x))\,dx = 5\pi$.

(3)

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(2t)\,dt &= 0, \text{ ohne Rechnung!} \\
\int \frac{2}{\frac{1}{3}x - 1}dx &= 6\ln\left|\frac{1}{3}x - 1\right| (1/\alpha \text{ -Regel!}), \\
\int \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx &= \int \left(x^{7/6} + x^{1/6}\right)dx = \frac{6}{13}x^{13/6} + \frac{6}{7}x^{7/6} \quad \text{Algebraische Umformung sowie Grundregel} \\
\int \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^{30} dx &= \frac{-2}{31}\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^{31} (1/\alpha - \text{Regel!}) \\
\int \sqrt{x\ln(2) - 1}dx &= \frac{2}{3\ln(2)}(x\ln(2) - 1)^{3/2} \ (1/\alpha - \text{ Regel!})
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int x\sin(2x)dx &= -\frac{x}{2}\cos(2x) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx \\
&= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) \\
\int x\sqrt{x}dx &= \int x^{3/2}dx = \frac{2}{5}x^{5/2}.
\end{aligned}$$

(5) Für das erste Integral nutzt man:

$$\begin{aligned}
\cos(x + y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y \\
\cos(x - y) &= \cos x\cos y + \sin x\sin y, \text{ also Summe:} \\
\cos(x - y) - \cos(x + y) &= 2\sin x\sin y, \text{ nun } x = y \text{ setzen.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)dx &= 2\int_0^\pi \sin^2(x)dx = 2\int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^\pi = \pi \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \sin^2 x\right)dx = 2\pi - \pi = \pi
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{1 - x^3}dx &= -\frac{1}{3}\int -3x^2\sqrt{1 - x^3}dx \left(= -\frac{1}{3}\int \sqrt{1 - u}du\right) \ (\text{mit } u = x^3) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(1 - x^3\right)^{3/2} = \frac{2}{9}\left(1 - x^3\right)^{3/2} \\
&\int \left(1 + \tan^2(x)\right)\tan(x)dx \left(= \int u du, \text{ mit } u = \tan x\right) \\
&= \frac{1}{2}\tan^2(x)
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
\int dx \ln\left(\sqrt[4]{x}\right) &= \int \frac{1}{4}\ln(x) = \frac{1}{4}x\ln(x) - \frac{1}{4}x \\
\int \frac{dx}{2+3x^2} &= \int \frac{1/2}{1+\left(\sqrt{3/2}x\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3/2}x\right) \\
&= \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
\int dx \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} &= \int du\sqrt{1-u} = -\frac{2}{3}(1-u)^{3/2} = \frac{2}{3}(1-\ln x)^{3/2} \\
\int x\ln\left(1-x^2\right)dx &= -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)\ln\left(1-x^2\right) - \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)
\end{aligned}$$

(9) $\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t)$ für stetige Funktion f : Das Integral mit variabler oberer Grenze ist eine Stammfunktion, ob man sie ausrechnen kann oder nicht (numerisch jedenfalls). Die untere Grenze regelt die additive Integrationskonstante.

(10)

$$\begin{aligned}
\int_0^{0.3} e^{-x^2}dx &\approx 0.1\left(e^0 + e^{-0.1^2} + e^{-0.2^2}\right) \approx 0.2951 \text{ (Obersumme)} \\
\int_0^{0.3} e^{-x^2}dx &\approx 0.1\left(e^{-0.1^2} + e^{-0.2^2} + e^{-0.3^2}\right) \approx 0.2864 \text{ (Untersumme)}
\end{aligned}$$

Der Fehler ist also höchstens die Differenz davon, weniger als 1/1000. Zwischenwerte zu nehmen, verbessert die Sache (vielleicht!):

$$\int_0^{0.3} e^{-x^2}dx \approx 0.1\left(e^{-0.05^2} + e^{-0.15^2} + e^{-0.25^2}\right) \approx 0.2915.$$

Ein guter numerischer Wert ist $\int_0^{0.3} e^{-x^2}dx = 0.291\,237\,882\,7$. Mit einer Streifenbreite von 1/20 schafft man Folgendes:

$$\sum_{k=0}^{19} \frac{3}{200}e^{-\left(\frac{3}{400}+k\cdot\frac{3}{200}\right)^2} \approx 0.291243$$

Man sieht, dass man recht viele Streifen braucht, um mehr Stellen hinter dem Komma korrekt zu bekommen.