Aufgaben zum Wochenende (2)

1. $\left|-\frac{1}{3}\vec{a}\right| = \frac{1}{3}\left|\vec{a}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{14}$. $\frac{1}{4}\vec{a}\left(-2\vec{b}\right) = -\frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right) &= (2,2,-1)\cdot((-2,3,1)\times(-1,3,-1)) \\ &= (2,2,-1)\cdot(-6,-3,-3) = -3\,(2,2,-1)\cdot(2,1,1) = -15. \\ -\vec{a}\cdot\left(4\vec{b}\times(-2)\,\vec{c}\right) &= -8\cdot 15 \text{ (Faktoren und Vertauschung!)}\end{aligned}$$

2. (a) Lösungsmenge parametrisiert (y als freier Parameter): $\vec{x}\,(\lambda) = \frac{1}{15}\,(7,0,12,11) + \lambda\,(1,1,-2,-3)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) Parametrisierung von L_a - günstig ist es, nicht z hinauszuwerfen, sondern z später als freien Parameter zu wählen, sonst gibt es lästige Fallunterscheidungen: $\vec{x}\,(\lambda) = \frac{1}{6+a^2}\,(2,a,0)+\lambda\left(4-3a, 9+2a, 6+a^2\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Normalenform für Geraden! Abstand der durch $\alpha x + by = d$, $ax + by = e$, gegebenen Geraden, $(a,b) \neq \vec{0}$, ist $\frac{|d-e|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Dazu kann man am bequemsten die Gleichungen als Gleichungen zweier paralleler Ebenen (die senkrecht auf der $xy-$ Ebene stehen) auffassen, für die das Resultat bekannt ist!

4. Der Richtungsvektor der gesuchten Geraden steht senkrecht auf $\overrightarrow{QR}$ und senkrecht auf einem Normalenvektor (wir wählen $(\vec{x}_R - \vec{x}_P)\times(\vec{x}_R - \vec{x}_Q)$ zum Dreieck, kann also mit

$$((2,-1,-3)\times(5,0,-2))\times(5,0,-2) = (22,29,55)$$

bestimmt werden, daher ist $\vec{x}_g\,(\lambda) = (1,2,-2) + \lambda\,(2,29,5)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$, eine Parametrisierung der gesuchten Höhengeraden.

5. Ansatz $(1,2,3) = \lambda\,(2,3,-1) + \vec{x}$, $\vec{x}$ senkrecht zu $(2,3,-1)$. Skalares Anmultiplizieren mit $(2,3,-1)$ ergibt $\lambda = \frac{5}{14}$, also $(1,2,3) = \frac{5}{14}\,(2,3,-1) + \frac{1}{14}\,(4,13,47)$.

6. Normalenform $x + 2y + 4z = 13$, Winkel im Bogenmaß $\arcsin\left(\frac{9}{\sqrt{21}\sqrt{6}}\right) = 0.93$ (gerundet), das sind etwas mehr als 53 Grad.

7. Die Spalten sind offenbar linear unabhängig, also $\mathrm{Kern}(A) = \{\vec{0}\}$. Das Bild ist die von den Spaltenvektoren erzeugt Ursprungsebene, also durch

$$\vec{x}\,(\lambda,\mu) = \lambda\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \text{parametrisiert.}$$

8. Die erste Bewegung: $\vec{x}\,(t) = (0,1) - (\sin(6\pi t), \cos(6\pi t))$. Man sollte etwa überlegen: $(\cos(-t-\pi/2), \sin(-t-\pi/2))$ für Bewegung auf dem Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung, Minus t für Drehung im Uhrzeigersinn, Subtraktion von $\pi/2$ für den Startpunkt unten, beim Winkel $-\pi/2$ also. Nun Mittelpunkt richtig stellen und Faktor für gewünschte Geschwindigkeit einführen. Schließlich kann man noch $\cos(-t-\pi/2) = -\sin t$ und $\sin(-t-\pi/2) = -\cos t$ nutzen. Für das Abrollen genügt es, festzustellen, dass der Mittelpunkt jeweils um die Länge des abgerollten Bogens weiterwandert, also nur $6\pi t\,(1,0)$ zu $\vec{x}\,(t)$ addieren.

9. Ansatz: $\vec{x}_g\,(\lambda) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda\,(b_1,b_2,b_3)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Gleichung der Fläche ergibt folgende Gleichung:

$$(a_3 + \lambda b_3)^2 = (a_1 + \lambda b_1)^2 + (a_2 + \lambda b_2)^2 - 1.$$

Nun aufpassen! Nicht etwa ist λ gesucht, sondern es sind möglichst einfache Werte für a_i, b_i, $1 \leq i \leq 3$, gesucht derart, dass sie Gleichung für *alle* Werte von λ gilt! Das führt zu folgenden Anforderungen:

$$\begin{aligned}b_3^2 &= b_1^2 + b_2^2 \\ a_3 b_3 &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ a_3^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 1\end{aligned}$$

Nunmehr wählt man bequem etwa $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ (besonders einfache Lösung der dritten Gleichung) und erhält:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \text{ (zweite Gleichung)}, \\ b_2^2 &= b_3^2 \text{ (erste Gleichung), einfache Lösung } b_2 = b_3 = 1. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\vec{x}_g(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R},$$

eine Gerade der gesuchten Art, und diese Gerade ist mit jedem Winkel um die $z-$ Achse zu drehen, um die Hyperboloidfläche zu erzeugen. Daraus ergibt sich folgende Parametrisierung dieser Fläche:

$$\begin{aligned} \vec{y}(\lambda, \alpha) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}_g(\lambda) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda\sin\alpha \\ \sin\alpha + \lambda\cos\alpha \\ \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \leq \alpha < 2\pi. \end{aligned}$$

Übung (9)

1. Man erhält ein schiefes Dreiecksprisma, das die Hälfte des Spates mit den Kantenvektoren $(5,4,0)$, $(1,4,-1)$, $(1,-1,2)$ ausmacht, das Volumen ist also

$$\frac{1}{2}(5,4,0)((1,4,-1)\times(1,-1,2))=\frac{23}{2}.$$

2. $(2\vec{x}-4\vec{y})\times(3\vec{y}-5\vec{x})=-14\vec{x}\times\vec{y}$.

3. $\vec{f}(\vec{x}+\vec{y})=\vec{a}\times(\vec{x}+\vec{y})=\vec{a}\times\vec{x}+\vec{a}\times\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})+\vec{f}(\vec{y})$, $\vec{f}(\lambda\vec{x})=\vec{a}\times(\lambda\vec{x})=\lambda(\vec{a}\times\vec{x})=\lambda\vec{f}(\vec{x})$. Der Kern besteht aus allen Vektoren parallel zu $\vec{a}$, das Bild ist die Ursprungsebene senkrecht zu $\vec{a}$.

4.
$$\det\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&-4\\1&2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}3&2&1\\1&0&-9\\-2&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}3&1&2\\1&-9&0\\-2&0&0\end{pmatrix}=18$$

5. $\mathrm{Re}(2+4j)=2$, $\mathrm{Im}\,(2+4j)=4$ (nicht $4j$ (!)) ,$\mathrm{Re}(z+\overline{z})=2\,\mathrm{Re}\,(z)$ (gilt immer), also im Beispiel $\mathrm{Re}\,(z)=-5$ das Resultat -10. $\mathrm{Im}\,(z+\overline{z})=0$ (das gilt für jede komplexe Zahl z.)

6. Für die erste wohl kein Problem, für die zweite spiegle man die erste an der reellen Achse, die dritte hat den Winkel $\frac{3\pi}{4}$ entgegen dem Uhrzeigersinn gezählt, ist also $-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}j$, die letzte ist vereinfacht $2e^{j\pi/6}$, hat also entgegen dem Uhrzeigersinn gezählt den Winkel $\pi/6$, ist also in kartesischer Form $\sqrt{3}+j$. Die Beträge sind $\sqrt{13}$, $\sqrt{13}$, 1, 2 der reihe nach.

7. $\frac{3-4j}{2-j}=2-j$, $|z|=\frac{|3-4j|}{|2-j|}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $|\overline{z}|=|z|$, $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$, im Beispiel $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}$, kartesische Formen: $\overline{z}=2+j$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{2-j}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}j$.

8. Man hat mit der Formel für das Quadrat des Flächeninhaltes mittels der senkrechten Projektion:

$$\vec{a}^2\left(\vec{b}^2-2\frac{\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}{\vec{a}^2}+\frac{\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}{\left(\vec{a}^2\right)^2}\vec{a}^2\right)=\vec{a}^2\vec{b}^2-\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2.$$

Nunmehr für die zweidimensionalen Vektoren: $\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2=a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2$, und $\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2=a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2$, also dasselbe. Dies ist aber das Quadrat der Determinante der entsprechenden $(2\times 2)-$ Matrix.

Übung (10)

1. $3\sqrt{3}+3j = 6\left(\cos\left(\pi/6\right)+j\sin\left(\pi/6\right)\right) = 6e^{j\pi/6}$. $-3+4j = 5e^{j\cdot(\pi+\arctan(-4/3))}$, besser geht es nicht, da der Winkel kein einfaches Vielfaches von π ist.

2. $\frac{2+z}{1+jz} = 3-j$ ist gleichwertig zu $2+z = (3-j)(1+jz)$, lineare Gleichung in z (!), Zusammenfassen ergibt $3jz = -1+j$, also $z = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}j$.

3. $\frac{e^{j\phi}-e^{-j\phi}}{2j} = \sin\phi$, $\frac{e^{j\phi}+e^{-j\phi}}{2} = \cos\phi$.

4. Mit $z = 2e^{-3j\pi}$ ist $z^5 = 32e^{-15j\pi} = 32e^{j\pi} = -32$ (Reduzieren des Winkels modulo 2π!).

5. Mit $z(t) = te^{jt}$, $t \geq 0$, läuft man einerseits im Einheitskreis entgegen dem Uhrzeigersinn herum, was der Faktor e^{jt} bewirkt, andererseits hat man den Faktor t dabei, der den Radius von Null an immer weiter aufbläst. Das ergibt eine Spirale, die mit jedem Umlauf um den gleichen Betrag nach außen wandert, also ähnlich wie eine aufgewickelte Matratze von der Seite aussieht (sogenannte Archimedische Spirale).

6. Doppelbrüche beseitigen, wir wollen natürlich kartesische Endform. zweckmäßig:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{1}{R+j\omega L}+\frac{1}{1/(j\omega C)}} &= \frac{R+j\omega L}{1+(R+j\omega L)\,j\omega C} = \frac{R+j\omega L}{1-\omega^2 LC+j\omega RC} \\
&= \frac{(R+j\omega L)\left(1-\omega^2 LC-j\omega RC\right)}{\left(1-\omega^2 LC\right)^2+\omega^2 R^2 C^2}\ (*) \\
&= \frac{R\left(1-\omega^2 LC\right)+\omega^2 RLC+j(\omega L\left(1-\omega^2 LC\right)-\omega R^2 C)}{\left(1-\omega^2 LC\right)^2+\omega^2 R^2 C^2}
\end{aligned}$$

Nun lese man die kartesische Form ab. $(*)$: Der Nenner ist eine reelle Zahl, und es besteht auch kein Grund, weiter auszumuliplizieren, ebenso beim Zähler später, da sich nichts weghebt. Die Schaltung: Ein Ohmscher Widerstand und eine Spule in Reihe, parallel dazu ein Kondensator. $\omega = 0$ sollte $R+j\omega L$ ergeben, da der Zweig über den Kondensator dann tot ist, tut es auch. Für $\omega \to \infty$ geht der Widerstand (über den Kondensatorzweig allein) nach Null, ist wegen ω^4 im Nenner auch korrekt. Weiter Einheitenkontrolle: $1-\omega^2 LC$ hat Dimension 1, ebenso $\omega^2 LC$ und $\omega^2 R^2 C$, $\omega^2 RLC$, $\omega R^2 C$ haben die Dimension eines Widerstandes, also hat der Zähler diese Dimension.

7.
$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x\cos y+\cos x\sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x\cos y-\cos x\sin y,
\end{aligned}$$

Addition liefert $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right)$.

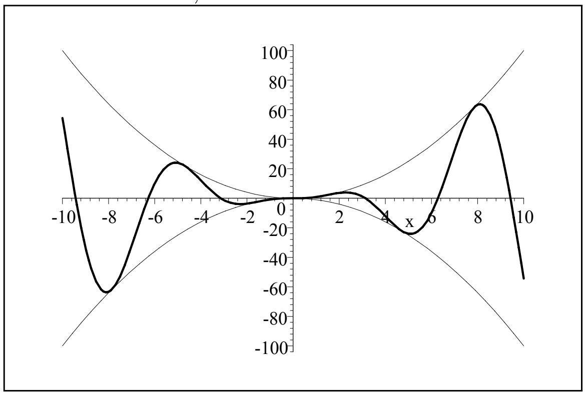
8. Die Minima der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -2+2\sin(3x+1)$ sind offenbar die von $\sin(3x+1)$. Nun kann man die Minima von sin nehmen, $u(k) = \frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, und die mit dem Graphen (nur hinsichtlich der $x-$ Achse!) auszuführenden Operationen vornehmen, also erstens Verschieben um 1 nach *links*, dann mit Faktor 3 *stauchen*, und erhält

$$x(k) = \frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{2}-1+2k\pi\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Man kann auch die Gleichung $3x+1 = \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ lösen und dasselbe erhalten.

Übung (11)

1. $|\sin(x)|$: Gerade Funktion, alle nach unten zeigenden Sinusbögen zu spiegeln, das gibt 'Girlanden', Ecken an den Nullstellen. $\sin|x|$: Der Graph von sin im Bereich $x \geq 0$ wird gespiegelt an der $y-$ Achse, das ergibt eine gerade Funktion, nur bei $x = 0$ entsteht eine Ecke. $\sin^2(x)$: Gerade Funktion, Graph ist glatt, keine Ecken (differenzierbar, werden wir später genauer wissen). Alle Werte positiv, Berührung der $x-$ Achse, wo die Nullstellen (die von sin also) sind. Wegen (Additionstheorem für cos!) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ sieht das wie eine normale Sinusschwingung aus, nur linear transformiert. $\sin(x^3)$: Ungerade Funktion, bei $x = 0$ flach wie x^3, dann zu beiden Seiten Schwingungen immer schneller, fürchterlich, kann man nur grob andeuten. $x^2 \sin(x)$:$Ungerade, flachbei$x=0,$Sinusgraphwirdhoch-undniedergezogenzudenHllkurveny$=$\pm x^2$, Amplitude steigt also steil zu beiden Seiten an, hier ein Bild mit den Hüllkurven:



2. Der alte Trick wie bei der verschobenen Ellipse: Der mit $(-a, -b)$ verschobene Graph ist der einer ungeraden Funktion, also $g(x) = f(x + a) - b$ ist gerade. Die Gleichung dafür kennen wir: $g(-x) = -g(x)$, also: $f(-x + a) - b = -f(x + a) + b$

3. $$\begin{array}{ccccc} & & f(x) & & \\ & \diagup & \circ & \diagdown & \\ \sin x & & & & x^2\sqrt{1-x^2} + \cos^2(2x+1) \\ & & & \diagup & + \quad \diagdown \\ & & x^2\sqrt{1-x^2} & & \cos^2(2x+1) \\ & \diagup & \cdot & \diagdown & \\ x^2 & & & & \sqrt{1-x^2} \end{array}$$, nun ist wohl klar, wie es weiter geht.

4. Standardansatz für exponentielles Wachsen oder Fallen:

$$f(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{t-t_0}{3}} = 100e^{-\ln(10)\frac{t-t_0}{3}}$$

Prüfen Sie noch einmal nach, dass alles stimmt!

5. Nach Skizze (Spiegelung an beiden Achsen des Graphen von exp sowie Verschiebungen) liegt ein Ansatz $f(t) = \alpha - \beta e^{-\gamma(t-t_0)}$ nahe, mit $\gamma > 0$. Nun ist klar die Forderung $\alpha = M$, $\beta = 100$. γ bleibt frei und regelt, in welcher Zeitspanne sich die Differenz zu M halbiert (oder entsprechend mit einem andern Faktor $k < 1$ multipliziert).

6. $2^{4x-1} = 10$, hat die eindeutige Lösung $x = \frac{1}{4}\frac{\ln 20}{\ln 2}$, $\log_3(x) = 15$ hat die Lösung 3^{15}.

   (a) $f(x) = (1 - x^2)e^x$ Auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, keine Symmetrie, Vorzeichen: Jeweils das von $1 - x^2$, Nullstellen ebenfalls von diesem Faktor bestimmt. Für $x \to -\infty$ zieht e^x asymptotisch zur Null, für $x \to \infty$ geht es steil nach $-\infty$. Die Existenz eines Minimums und eines Maximums sind damit klar, wenn man daran denkt, dass der Graph glatt ist (keine Sprünge, stetig).

(b) $g(x) = \ln(-2x+1)$ Keine Symmetrie, lineare Transformation von ln, Definitionsbereich (Menge der Zahlen x mit) $x < \frac{1}{2}$. Pol bei $x = \frac{1}{2}$, etwas steiler als der Graph von ln, nach links ansteigend. (Eine Spiegelung an der $y-$ Achse ist dabei.)

(c) $h_1(x) = \frac{x}{x^2-1}$ ungerade, Vorzeichen beachten, Pole sehen. Dominanz des Nenners für $x \to \pm\infty$, also asymptotisch nach Null. Das ergibt sofort den Graphen grob qualitativ. $h_2(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ ist gerade, hat dieselben Pole, auch dieselbe (einzige) Nullstelle. Für $x \to \pm\infty$ geht es aus dem Negativen (von den Polen von $-\infty$ her kommend) asymptotisch gegen -1. $h_3(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ ist wiederum ungerade, anders hier: Dominanz des Zählers für $x \to \pm\infty$, $\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}$, also Asymptote für $x \to \pm\infty$ einheitlich $y = -x$. Flachstelle (Sattel) bei $x = 0$ (einzige Nullstelle)

7. Man braucht ein Polynom 4. Grades, das einfachste ist $x^4 - x$, wobei allerdings die Buckel ins Negative ziemlich flach werden.

Übung (12)

1. $f(x) = 2(1-x)^3$ hat die Tangentenzerlegung (man ziehe in Gedanken $f(x_0)$ ab von $f(x_0+\Delta x)$ und ordne das Verbleibende nach Potenzen von Δx ab der ersten, für die andern braucht man das nicht auszuführen):

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x) &= 2(1-(x_0+\Delta x))^3 = 2\left(1-3(x_0+\Delta x)+3(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)^3\right) \\ & f(x_0)+2\left(-3+6x_0-3x_0^2\right)\Delta x + \text{ Terme in } \Delta x^2, \Delta x^3, \end{aligned}$$

also lautet, da der Restterm offenbar noch durch Δx geteilt nach Null geht, die Ableitung an der Stelle $x_0 : f'(x_0) = -6+12x_0-6x_0^2$. Also $f'(2) = -6$, somit $f(1.99) \approx f(2) - 6\cdot 0.01 = -1.94$, absoluter Fehler $f(1.99)+1.94$, das ist etwa $-6\cdot 10^{-4}$, relativer Fehler $\frac{f(1.99)+1.94}{f(1.99)}$, etwa $3\cdot 10^{-4}$.

2. Die Ableitungen:

   (a) $\frac{d}{dx}\left(e^x - 2\sqrt{x^3} + x^{-\pi-1} + \ln(x) - 3\sin(x)\right) = e^x - \frac{2}{3}x^{-2/3} - (\pi+1)x^{-\pi-2} + \frac{1}{x} - 3\cos x.$

   (b) $\frac{d}{dx}\sin(-3x) = -3\cos(-3x) = -3\cos(3x)$. $\frac{d}{dt}\sin(\omega t+\varphi) = \omega\cos(\omega t+\varphi)$, $\frac{d}{dx}(-2x-1)^3 = -6(2x+1)^2$ (kleine Umformung mit den Vorzeichen!)

   (c) $\frac{d}{dx}x\tan(x) = \tan(x) + x\left(1+\tan^2(x)\right)$

   (d) Nur im ersten Fall Quotientenregel, die andern gehen schneller mit Kettenregel (dazu Linearitätsregel) $\frac{d}{dx}\frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)} = \frac{2}{\cos^2 x}\left(1+\sin x+\sin x\cos^2 x\right)$, $\frac{d}{dx}\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = e^{2x}-e^{-2x}$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{(-2x+1)^5}} = \frac{10}{3}(-2x+1)^{-\frac{8}{3}}$

   (e) $\frac{d}{dx}\frac{x^2}{\ln(2)} = 2x/\ln(2)$

   (f) $\frac{d}{dx}\left(x-x^3\right)^4 = 4\left(1-3x^2\right)\left(x-x^3\right)^3.$

   (g)
   $$\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{2x^2-3}} = \frac{\sqrt{2x^2-3}-\frac{4x^2}{2\sqrt{2x^2-3}}}{2x^2-3} = \frac{-3}{(2x^2-3)^{3/2}}.$$

   (h) $\frac{d}{d\alpha}\frac{x^2}{(x-\alpha)^2(x-3)} = 2\frac{x^2}{(x-\alpha)^3(x-3)}$

   (i) $\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$, $\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln(a)} = \ln(a)\,e^{x\ln(a)} = a^x\ln(a)$. $(a>0.)$

3. Die Steigung des Graphen von $f(x) = x+\ln(x)$ ist $f'(x) = 1+\frac{1}{x}$ und geht nach 1 für $x\to\infty$, der Graph wird immer gerader, ohne allerdings eine Gerade als Asymptote zu besitzen, weil die Logarithmuswerte eben mehr bringen als jede Konstante.

4. Die Funktion $g(x) = \sin(\sin(x))$ steigt und fällt genau dort, wo sin das tut. Die Maxima sind offenbar an denselben Stellen, wo sin sie hat, also $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, k ganzzahlig. Die maximalen Werte sind stets gleich $\sin(1)$. die minimalen $-\sin(1)$. Das sagt auch die 1. Ableitung $\cos(x)\cos(\sin(x))$, welche ihr Vorzeichen wie $\cos x$ wechselt, da der zweite Faktor stets positiv ist. Bei Wechsel des Vorzeichens von cos von $+$ nach $-$ liegen also die Maxima. Das sind genau die oben genannten Stellen. Der Graph sieht dem einer Sinuskurve erstaunlich ähnlich. Aber es ist keine: Flacht man sin mit einem Faktor ab, so wird auch die Steigung bei den Nullstellen kleiner, nicht so im Falle von $g(x)$, hier sind die Steigungen bei den Nullstellen vom Betrage 1.

5. $f'(x) = \frac{-2\cos(2x)}{(1+\sin(2x))^2}$ (zum Ausmultiplizieren haben wir keinen Grund!). Also $f'(0) = -2$ und $f(-0.1)$ wird in erster Näherung $1+0.2 = 1.2$, der relative Fehler der Näherung ist etwa 0.038.

6. Man bekommt das lineare (!) System

$$\begin{gathered} \beta = 1 \\ \alpha\cos(0) - \beta\sin(0) = 2 \end{gathered}$$

und erhält $\alpha = 2$, und nun wählt man günstig $g(t) = f(t-t_0)$ für die zweite Frage.