Aufgaben zum Wochenende (1)

1. $(x-1)^5 = \sum\limits_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k (-1)^{5-k} = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1.$

2. Die Bedingungen lauten

$$\begin{aligned} a+b+c &= 1 \\ a+2b+4c &= 1 \end{aligned}$$

Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten ergibt

$$b+3c=0, \text{ oder } b=-3c,$$

Einsetzen in die erste Gleichung dann

$$a = 1-b-c = 1-2c.$$

Damit bleibt $c \neq 0$ frei wählbar, und der allgemeine Ausdruck eines Polynoms mit den verlangten Eigenschaften ist

$$f_c(x) = 1-2c-3cx+cx^2.$$

Die geometrische Bedeutung von c ist die eines Streckungsfaktors, zusätzlich bewirkt das Vorzeichen von c noch Öffnung der Parabel nach unten oder oben.

3. Zunächst haben wir zu unterscheiden:
1. Fall: $a=-1$. Dann ist die Gleichung die lineare $-x+1=0$ mit der einzigen Lösung $x=1$.
2. Fall: $a \neq -1$. Dann liegt eine quadratische Gleichung vor mit Normalform

$$x^2 + \frac{a}{a+1}x + \frac{1}{a+1} = 0.$$

Anwenden der Lösungsformel ergibt

$$\begin{aligned} x_{1,2}(a) &= -\frac{a}{2(a+1)} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4(a+1)^2} - \frac{1}{a+1}}, \text{ schöner reduziert} \\ x_{1,2}(a) &= -\frac{a}{2(a+1)} \pm \frac{1}{2(a+1)}\sqrt{a^2-4a-4}. \end{aligned}$$

Nun hat $a^2-4a-4=0$
die reellen Lösungen $2 \pm 2\sqrt{2}$. Das ergibt folgende Fallunterscheidung für die Lösungsmenge L_a $(a \neq -1)$ der Gleichung $x^2 + \frac{a}{a+1}x + \frac{1}{a+1} = 0:$

$$L_a = \begin{cases} \emptyset \text{ für } 2-2\sqrt{2} < a < 2+\sqrt{2} \\ \{-\frac{1}{2}\frac{a}{a+1}\} \text{ für } a \in \{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\} \\ \{x_1(a), x_2(a)\} \text{ für } a < 2-2\sqrt{2} \text{oder } a > 2+\sqrt{2}. \end{cases}$$

4. Die Lösungsmenge der Ungleichung $|x|-|y| \leq 1$ ist offenbar spiegelsymmetrisch bezüglich beider Koordinatenachsen. Im Bereich $x, y \geq 0$ sieht man leicht die Lösungsmenge: Alle Punkte oberhalb der Halbgeraden $y = x+1$, $x \geq 0$ gehören dazu, einschließlich dieser Halbgeraden selbst. Diese Menge ist nun symmetrisch durch Spiegelung an beiden Koordinatenachsen zu ergänzen.

5. Es wird die Oberfläche eines Ellipsoids beschrieben, mit Halbachsenlängen, die man ablesen kann, etwa $1/\sqrt{2}$ zur $x-$ Richtung, usw. Daher wird man beim Schnitt mit der Ebene $z = 1/4$ bereits eine Ellipse als Schnitt erwarten. Ausgerechnet:

$$2x^2 + 3y^2 = \frac{3}{4}.$$

Diese Gleichung beschreibt eine Ellipse, deren Halbachsenlängen man nach Normalisierung der Gleichung sehen kann:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}/(2\sqrt{2})}\right)^2 + \left(\frac{y}{1/2}\right)^2 = 1.$$

Die Ellipse in der $xy-$ Ebene, welche mit dieser Gleichung beschrieben wird, ist auf die Ebene $z = 1/4$ anzuheben, parallel zur $z-$ Achse verschiebend.

6. Seien $\vec{x}_P = (-2, 3, -1)$, $\vec{x}_Q = (4, 2, 2)$. (a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade h, die parallel zu der Geraden durch P und Q verläuft und auf der S liegt, $\vec{x}_S = (3, 5, -2)$. (b) Welche Gerade liegt genau in der Mitte zwischen h und der Geraden g, welche durch P und Q geht? (c) Beschreiben Sie die Menge aller Punkte, die zwischen den Geraden g und h liegen, einschließlich dieser Geraden als Ränder. (d) In welchem Punkt schneidet die Gerade g die Ebene, welche durch $2x + y - z = 1$ gegeben wird?

7. (a) $\vec{x}_h(\lambda) = (3, 5, -2) + \lambda(6, -1, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) Parametrisierung dieser Geraden: Als Aufpunktvektor ist z.B. $\frac{1}{2}(3, 5, -2) + \frac{1}{2}(-2, 3, -1) = \left(\frac{1}{2}, 4, -\frac{3}{2}\right)$ geeignet, der Richtungsvektor beizubehalten.
   (c) Eine Parametrisierung dieser Menge erhält man mit $\vec{x}(\alpha, \beta) = \alpha(3, 5, -2) + (1 - \alpha)(-2, 3, -1) + \beta(6, -1, 3)$, $0 \le \alpha \le 1$, $\beta \in \mathbb{R}$.
   (d) Einsetzen der Koordinatendarstellung des allgemeinen Punktes der Geraden g, $\vec{x}_g(\lambda) = (-2, 3, -1) + \lambda(6, -1, 3)$, in die Gleichung ergibt

   $$2(-2 + 6\lambda) + 3 - \lambda - 1 + 3\lambda = 1,$$

   also $\lambda = \frac{3}{14}$. Einsetzen nicht vergessen: Der (einzige) Schnittpunkt zwischen der Geraden und der Ebene ist $\vec{x}_g\left(\frac{3}{14}\right) = (-2, 3, -1) + \frac{3}{14}(6, -1, 3) = \frac{1}{14}(-10, 39, -5)$.

8. Der freie Vektor ist $\frac{a}{4}\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\vec{x}_P^K = (0, b) + \frac{a}{4}\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\vec{x}_Q^K = (0, b) + \frac{a}{4}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, Parametrisierung des Kreises: $\vec{x}(t) = \left(0, b + \frac{a}{4}\right) + \frac{a}{4}(\cos t, \sin t)$, $0 \le t < 2\pi$.

9. (a) Nichtlinear, eindimensional (Funktionsgraph in Parameterdarstellung, aber nur im angegebenen Intervall)
   (b) Parameterdarstellung einer Geraden, ordentlich geschrieben: $\vec{x}(\lambda) = (2, 3) + \lambda(1, -5)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alte Form: $y = -5(x - 2) + 3 = -5x + 13$
   (c) Nichtlinear, eindimensional, Parabel mit Scheitel im Ursprung und $x-$ Achse als Achse, nach rechts geöffnet. (Streckungsfaktor 1/2.) Darstellung durch Bestimmungsgleichung.
   (d) Linear, beschränkt, zweidimensional, genauer: Parallelogrammfläche von den beiden Vektoren erzeugt (zeichnen!), die Eckpunkte sollte man der Übung halber noch einmal nennen.
   (e) Zweidimensional, nichtlinear, unbeschränkt: Gekrümmte Fläche, genauer Hyperboloidoberfläche (zweischalig).
   (f) Keine Bedingung für y. Vereinigung der beiden Ebenen, die sich durch beliebiges Verschieben der Geraden $z = x$, $z = -x$ auf der $xz-$ Ebene längs der $y-$ Achse ergeben.
   (g) Parabel, Scheitel im Ursprung, Parabelebene ist $x = y$. Gegen Normalparabel mit Faktor 1/2 (in Richtung der Ordinate) gestreckt, also gestaucht. Denn zum Abstand (vom Ursprung) $\sqrt{2\lambda^2} = \sqrt{2}\,|\lambda|$ gehört der $z-$ Wert λ^2.
   (h) Ebene, ordentlich geschrieben: $\vec{x}(\lambda, \mu) = (1, -1, 0) + \lambda(2, 2, 1) + \mu(1, 3, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Übung (5)

1. Man erhält so etwas wie einen Doppelpfeil, symmetrisch zur Geraden $y = x$. Eine Parametrisierung erhält man sofort mit $\vec{x}(\alpha, \beta, \lambda) = (\alpha, \beta) + \lambda(1, 1)$, α, β, λ in den angegebenen Grenzen. Natürlich kann man die resultierende Punktmenge auch gut mit Ungleichungen beschreiben, naheliegend mit dem System $0 \leq x, y \leq 3$, $|x - y| \leq 1$.

2. $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y - 2z$, y, z freie Parameter, also naheliegende Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}\vec{x}(\lambda, \mu) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda - 2\mu, \lambda, \mu\right) \\ &= \frac{1}{2}(1, 0, 0) + \lambda\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right) + \mu(-2, 0, 1), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Natürlich ist auch $\vec{y}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(1, 0, 0) + \alpha(3, 2, 0) + \beta(-2, 0, 1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, eine Parameterdarstellung derselben Ebene.

3. Gleich als 'Normalfall' erwarten: Die Lösungsmenge sollte einen freien Parameter haben, also geometrisch eine Gerade im $\mathbb{R}^4$. Man wird zuerst x eliminieren, später v als freien Parameter behalten. Hier ist die Parameterdarstellung der Lösungsmenge, welche man so erhält (Reihenfolge der Unbestimmten: x, y, u, v):

$$\vec{w}(v) = \frac{1}{8}(3, -4, -6, 0) + v\left(\frac{9}{8}, -\frac{5}{2}, -\frac{13}{4}, 1\right), \ v \in \mathbb{R}.$$

Naheliegende Umparametrisierung derselben Geraden im $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{a}(\lambda) = \frac{1}{8}(3, -4, -6, 0) + \lambda(9, -20, -26, 8), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Es sollte Wert darauf gelegt werden, dass die ökonomische Schreibweise beim Rechnen beachtet wird, stets ein kleineres System mit einer Zeile und einer Unbestimmten weniger zu erhalten ist, also hier im ersten Schritt nach Elimination von x :

$$\begin{matrix} 8y - 4u + 7v = -1 \\ 3y - 2u + v = 0 \end{matrix},$$

nun im zweiten Schritt mit zweckmäßiger Elimination von u :

$$2y + 5v = -1$$

Nunmehr sind alle Unbestimmten bis auf v durch den freien Parameter v auszudrücken, man erhält die Gleichungen $x = \frac{9}{8}v + \frac{3}{8}$, $y = -\frac{5}{2}v - \frac{1}{2}$, $u = -\frac{13}{4}v - \frac{3}{4}$. Daraus sollte man nun die obenstehende Parameterdarstellung gewinnen.

4. Zweckmäßig zuerst ganzzahlige Koeffizienten schaffen:

$$\begin{aligned} -3x - 4y + 3z &= 6 \\ 9x - 6y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

Zweckmäßig eliminiert man offenbar x und erhält

$$-18y + 13z = 18,$$

mit z als freiem Parameter bekommt man $y = \frac{13}{18}z - 1$, $x = \frac{1}{27}z - \frac{2}{3}$ und damit die Parameterdarstellung der Schnittgeraden

$$\vec{x}(\lambda) = \frac{1}{18}(-12, -18, 0) + \lambda(2, 39, 54), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. Einsetzen der Koordinaten von $\vec{x}_F(\lambda, \mu)$ in die Gleichung für E ergibt die lineare Gleichung

$$4\lambda + \mu = 1,$$

also die Beziehung $\mu = 1 - 4\lambda$, Spezialisieren von $\vec{x}_F(\lambda, \mu)$ zu $\mu = 1 - 4\lambda$ ergibt dann die folgende Parametrisierung der Schnittgeraden:

$$\vec{x}_g(\lambda) = (0, 4, 5) + \lambda(2, -7, -11), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Im Vergleich zur vorigen Aufgabe: Man hat eine Lösung im Parameterbereich (allerdings eines noch einfacheren Gleichungssystems), muss dafür aber in die Parameterdarstellung (hier von F) einsetzen. Mit zwei Parameterdarstellungen dagegen erhält man ein System mit drei Gleichungen und vier Unbestimmten, dazu kommt noch das Einsetzen mittels der zu erhaltenden Parameterbeziehung.

6. $\vec{y}_E(\lambda, \mu) = (1, 2, 1) + \lambda(1, 1, 3) + \mu(1, 2, -2), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

7. Setzt man den Geschwindigkeitsvektor relativ zum Wasser $\vec{s} = (s_1, s_2)$ und den Geschwindigkeitsvektor des Wassers $\vec{v} = (v, 0)$, $v \neq 0$, so erhält man die Bedingung $\lambda(s_1 + v, s_2) = (0, b)$ für ein $\lambda > 0$. Das bedeutet $s_1 = -v$ und $s_2 > 0$. Insbesondere muss der Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\vec{s}$ größer als der von $\vec{v}$ sein, und die erste Komponente muss genau derjenigen der Wassergeschwindigkeit entgegengesetzt sein.

Übung (6)

1. Einsetzen des Parameterausdrucks in die Ebenengleichung ergibt die Gleichung

$$2\lambda\alpha - 4\lambda = -1,$$

mit α als äußerem Parameter und λ als Unbestimmter (!). Das ergibt für $\alpha = 2$ keine Lösung, also keinen Schnittpunkt, für $\alpha \neq 2$ den eindeutigen Schnittpunkt

$$\vec{x}_{S_\alpha} = (1,2,2) + \frac{1}{2(2-\alpha)}(\alpha,1,-3).$$

Nun ist $\frac{\alpha}{2(2-\alpha)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2-\alpha}$, also

$$\vec{x}_{S_\alpha} = \left(\frac{1}{2},2,2\right) + \frac{1}{2(2-\alpha)}(1,1,-3),$$

also ist die Vereinigung der Schnittpunkte die Gerade $\vec{x}_g(\lambda) = \left(\frac{1}{2},2,2\right) + \lambda(1,1,-3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

2. Man parametrisiert die Gerade durch P und Q durch $\vec{x}_g(\lambda) = \vec{x}_P + \lambda(\vec{x}_Q - \vec{x}_P)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und schneidet g mit der Ebene. Nur wenn man eine Parameterlösung λ im Intervall $[0,1]$ findet, schneidet die Ebene die Strecke $\overline{PQ}$. Im Beispiel erhält man $(2,1,1) + \lambda(-1,-4,1)$ und die Gleichung für $\lambda : 4 + 3\lambda = 1$, also $\lambda = -1$, so dass zwar die gerade, aber nicht die Strecke geschnitten wird.

3. Man hat $(1,5,5) = (2,1,3) + (-1,4,2)$ und $(3,-3,1) = (2,1,3) - (-1,4,2)$. Parametrisierung der Punktmenge zwischen den Ebenen: $\vec{y}(\lambda,\mu,\gamma) = \lambda(1,5,5) + \mu(3,-3,1) + \gamma(1,2,2)$, $0 < \gamma < 1$.

4. Schwerpunkt ist $\frac{1}{6}(1,2,-3) + \frac{1}{3}(-2,1,-4) + \frac{1}{2}(3,-2,1) = \frac{1}{3}(3,-1,-4)$.

5. Man kann sehen, dass $(3,4,5) = 2(2,3,4) - (1,2,3)$. Also stellt die nichttriviale Linearkombination $(1,2,3) - 2(2,3,4) + (3,4,5)$ den Nullvektor dar. Die Vektoren bilden ein linear abhängiges System.

6. $\vec{x}(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha\vec{x}_A + \beta\vec{x}_B + \gamma\vec{x}_C$, mit $\alpha+\beta+\gamma = 1$, $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$, wie man mit der Mittelwertidee des gewichteten Mittels einsehen kann, konstruktiv aber auch noch einmal so mit Skizze einsehen sollte: Mit Strahlensatz hat man eine Parametrisierung mit $\vec{y}(\lambda,\mu) = \vec{x}_A + \lambda(\vec{x}_B - \vec{x}_A) + \mu(\vec{x}_C - \vec{x}_A)$, $0 \leq \mu \leq \lambda \leq 1$. Der Koeffizient bei $\vec{x}_A$ ist gerade $1-\lambda-\mu$. Das ist α aus der ersten Form. Aber das geht auch für ein System von Punkten $P_1,...,P_n$ ebenso: Man hat zu bilden: $\vec{x}(\alpha_1,...,\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_{P_i}$, $\alpha_1,...,\alpha_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Zur Begründung der Tatsache, dass die Menge der so erhaltenen Punkte konvex ist, genügt es, zu zeigen dass ein Punkt R auf der Verbindungsstrecke zwischen den Punkten mit Ortsvektoren $\vec{x}(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\vec{x}(\beta_1,...,\beta_n)$ mit Parametertupeln, welche die angegebene Bedingung erfüllen, stets wieder so eine Darstellung hat. Man hat

$$\vec{x}_R = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_{P_i} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_{P_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_{P_i}\right) \text{ mit } 0 \leq \lambda \leq 1,$$

also

$$\vec{x}_R = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(1-\lambda) + \lambda\beta_i)\,\vec{x}_{P_i},$$

und es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(1-\lambda) + \lambda\beta_i) = (1-\lambda)\sum \alpha_i + \lambda \sum \beta_i = 1 - \lambda + \lambda = 1,$$

ferner sind alle $\alpha_i(1-\lambda) + \lambda\beta_i \geq 0$, da alle Bestandteile nicht negativ sind. Es wäre noch zu zeigen, dass man alle diese Ausdrücke benötigt, um die kleinste konvexe Menge zu erhalten, welche die vorgegebenen Punkte enthält. Das geht mit Induktion über die Anzahl der Punkte: Für einen einzigen Punkt ist die Sache banal. Bei $n+1$ Punkten $P_1,...,P_{n+1}$ muss man nach Induktionsvoraussetzung wenigstens alle entsprechenden Ausdrücke mit $P_1,...,P_n$ aufnehmen, dazu aber noch alle Verbindungsstrecken zwischen

P_{n+1} und einem der Punkte mit Ortsvektoren $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_{Pi}$, also $\vec{x}_{P_{n+1}} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_{Pi} - \vec{x}_{P_{n+1}} \right)$ mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$. Das ergibt die Koeffizienten $\beta_i = \begin{cases} \lambda \alpha_i \text{ für } 1 \leq i \leq n, \\ 1 - \lambda \text{ für } i = n+1 \end{cases}$, und so erhält man einen beliebigen Satz von $n+1$ Koeffizienten, welche die angegebene Bedingung erfüllen.

Übung (7)

Alle im Zusammenhang von Längen und Winkeln betrachteten Koordinatensysteme sind als kartesische vorauszusetzen! (Nur aus Platzersparnisgründen werden hier zuweilen Zeilenvektoren geschrieben.)

1. In Matrixform sieht das vorgegebene Gleichungssystem so aus:
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Das zugehörige homogene System ist
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ 4x - 3y + 5z &= 0 \end{aligned}$$
und ist mit Subtraktion beider Zeilen
$$2x + 5z = 0$$
schnell gelöst, mit parametrisierter Lösungsmenge
$$\vec{x}\,(z) = z \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R}.$$
Für das inhomogene System benötigt man noch einen Stützvektor in Gestalt einer speziellen Lösung. Dazu wird man $z = 0$ setzen und erhält $x = 1/2$, $y = 0$, also ist die Lösungsmenge in parametrisierter Form:
$$\vec{y}\,(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R}.$$

2. (a) $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$, der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugte Raum, parametrisiert mit $\vec{y}\,(\lambda, \mu) = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   (b) Erstes kann sein, weil Aufpunktvektor offenbar nicht als $\vec{0}$ gewählt werden muss. Wegen a. kann Letzteres nicht sein.
   (c) Natürlich: Es folgen keine Angaben über die Dimension des Urbildraums, sie kann größer sein als die des Bildraums (mehr Zeilen als Spalten in A, am bequemsten eine Nullzeile, dann in $\vec{c}$ die entsprechende Komponente $\neq 0$ wählen.)

3. Das Gleichungssystem
$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$
ist nicht für alle $\vec{b}$ lösbar, weil die Zeilenvektoren offenbar ein linear abhängiges System darstellen, wozu man nicht zu rechnen braucht. Einen konkreten Vektor $\vec{b}_0$ an, so dass $A\vec{x} = \vec{b}_0$ nicht lösbar ist, erhält man mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ebenfalls ohne Rechnung. Die Menge der Vektoren $\vec{b}$, für die $A\vec{x} = \vec{b}$ wenigstens eine Lösung hat, ist einfach das Bild von A, also zu parametrisieren durch
$$\vec{x}\,(\lambda, \mu) = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4. Matrix der Drehung:
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix},$$
zu gewinnen mit einer Skizze, welche die geforderten Bilder von $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ zeigt, mit $\cos(\pi/6) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (Pythagoras!)

5. Eine Scherung der beschriebenen Art funktioniert so, dass jeweils zur $y-$ Komponente ein bestimmtes Vielfaches der $x-$ Komponente addiert wird, während die $x-$ Komponente erhalten bleibt, also $\vec{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ ax+y \end{pmatrix}$. Daraus ist die Matrix ablesbar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

6. Unmittelbar sieht man, dass für diese Spiegelungsabbildung $\vec{f}$ gilt: $\vec{f}\left(\vec{0}\right) \neq \vec{0}$, weshalb sie nicht linear sein kann. Aber es handelt sich um eine affine Abbildung:

$$\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}.$$

Man sollte sich in diesem Kontext den Unterschied zwischen 'linear im Sinne der Vektorraumstruktur' und 'linear' mit zugelassenen additiven konstanten Gliedern noch einmal klarmachen. Letzteres heißt gern 'affin' zur besseren Unterscheidung. Analog unterscheidet man Vektor-Unterräume 'affine Unterräume' - Letztere entstehen aus Ersteren durch Parallelverschiebung, also Wegstützen vom Ursprung. Aber der Gebrauch der einfachen Bezeichnung 'linear' für den allgemeineren affinen Sinn ist nützlich und in einigen Zusammenhängen üblich. Eine Spiegelung an einer Ursprungsebene ist dagegen stets linear, weil anschaulich offenbar mit den linearen Operationen vertauschend. Eine Skizze zeigt das sofort. Man kann auch so argumentieren, dass nach Drehung eine Ursprungsebene in eine Koordinatenebene überführt werden kann. Für die Spiegelung an einer solchen kann man sofort sehen, dass der additive konstante Term entfällt und eine Matrix wie oben übrigbleibt. Dann kann man die Spiegelung an beliebiger Ursprungsebene als Hintereinanderschaltung von Drehungen und linearer Spiegelung darstellen, was offenbar wieder linear ist, da Drehungen es sind.

7. $|(2,3,-1)| = \sqrt{14}$, also $|(-4,-6,2)| = 2\sqrt{14}$.

Übung (8)

1. $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$, gesuchter Vektor: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}(1,1)$.

2. Der Abstand ist $|(3,-1,-8)| = \sqrt{74}$.

3. $\frac{3\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}$, das ist ein Vektor parallel zu $\vec{a}$, nicht etwa zu $\vec{b}$, wie falsches 'Assoziativgesetz' ergäbe.

4. (a) $\left(\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{2}{3}\vec{y}\right)^2 = \frac{1}{4}\vec{x}^2 - \frac{2}{3}\vec{x}\vec{y} + \frac{4}{9}\vec{y}^2$.

   (b) $-4\vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}^2$.

5. Seien die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ senkrecht aufeinander. Dann hat man

$$\left(\vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3\vec{a}_1}{\vec{a}_1^2}\vec{a}_1 - \frac{\vec{a}_3\vec{a}_2}{\vec{a}_2^2}\vec{a}_2\right)\vec{a}_1 = \vec{a}_3\vec{a}_1 - \frac{a_3\vec{a}_1}{\vec{a}_1^2}\vec{a}_1^2 - 0 = 0$$

   (Es wird nur durch die Zahl $\vec{a}_1^2$ gekürzt!) Analog für $\vec{a}_2$.

6. Winkel zwischen g und $xy-$ Ebene gleich $\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = 0.93$, etwa 53 Grad.

7. Zur Ebene E, gegeben durch die Gleichung $2x - y + 3z = 1$:

   (a) Achsenabschnitte $1/2$, -1, $1/3$.

   (b) $(2,-1,3)$

   (c) $1/\sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{14}$

   (d) Parallele Ebene zu E durch P hat Gleichung $2x - y + 3z = 13$, Abstand also $\frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6}{7}\sqrt{14}$.

   (e) Gleichung für $F : 2x - y + 3z = -5$, Abstand also $\frac{3}{7}\sqrt{14}$.

   (f) Winkel mit $xy-$ Ebene: $\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = 0.64$, knapp 37 Grad.

   (g) Man prüft, ob die Koordinatendarstellung von $\vec{x}_Q$ die Ebenengleichung erfüllt, ferner, ob $\vec{a}\cdot(2,-1,3) = 0$ ist. g liegt auf E genau dann, wenn beides der Fall ist.

8. Man hat

$$\left(\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right) = 0$$

   (distributiv mit dem Skalarprodukt ausrechnen!)