

Übung (1)

1. Erweitern mit $\sqrt{1+x^2}$ und anschließendes offensichtliches Kürzen ergibt

$$\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Der Ausdruck nimmt alle reellen Zahlenwerte im Bereich $]0, 1]$ an.

2. Man erhält $\frac{1}{2+3\sqrt{x}} = \frac{2-3\sqrt{x}}{4-9x}$, kann also die Wurzel im Nenner beseitigen.
 3. Die Gerade g geht durch die Punkte $(-3, 1)$ und $(4, -2)$. Also wird sie beschrieben durch

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{-2 - 1}{4 - (-3)}(x - (-3)), \text{ also durch} \\ y &= -\frac{3}{7}x - \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Die Achsenabschnittsform sollte man daraus direkt ablesen:

$$\frac{x}{-2/3} + \frac{y}{-2/7} = 1$$

und natürlich die Achsenabschnitte sehen.

4. Zuerst im Kopf die Terme geordnet aufsummeln: $(a+10)x^2 + (2a-6)x - 2a = 0$, dann Fallunterscheidung: Für $a+10=0$ lineare Gleichung $-26x+20=0$, mit Lösung $x=\frac{10}{13}$. Zweiter Fall: $a \neq -10$, dann Normalform der quadratischen Gleichung $x^2 + \frac{2a-6}{a+10}x - \frac{2a}{a+10} = 0$, und diese hat nach Einsetzen in die Lösungsformel für quadratische Gleichungen die Lösungen $x_{1,2}(a) = \frac{3-a}{10+a} \pm \frac{1}{10+a}\sqrt{3a^2+14a+9}$, die nunmehr anhand der Diskriminante zu diskutieren sind: $a^2 + \frac{14}{3}a + 3 = 0$ hat die Lösungen $a_{1,2} = -\frac{7}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{22}$, also haben wir folgende Unter-Fälle: Die ursprüngliche quadratische Gleichung hat keine Lösung für a echt zwischen a_1 und a_2 , für $a = a_1$ oder $a = a_2$ ergibt sich die einzige Lösung $\frac{3-a}{10+a}$, für alle andern Werte von a werden die zwei verschiedenen Lösungen durch obenstehende Lösungsformel gegeben.
 5. $x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} = 0$ hat die Lösungen $\alpha = -1, \beta = \frac{3}{5}$. Also $y = 5(x+1)(x-\frac{3}{5})$. Die zweite Form: $y = 5(x^2 + \frac{2}{5}x) - 3 = 5(x + \frac{1}{5})^2 - \frac{16}{5}$. Also Scheitelpunkt in $(-\frac{1}{5}, -\frac{16}{5})$. (Richtig einsetzen, keine Vorzeichenfehler machen!)
 6. Die Scheitelpunktsformen zeigen den Faktor a_2 bzw. b_2 beim quadratischen Glied, die Lage der Scheitelpunkte ist gleichgültig, ebenso die Vorzeichen von a_2 und b_2 . Also sind die Parabeln kongruent genau dann, wenn $|a_2| = |b_2|$.
 7. Man hat

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b},$$

die Differenz arithmetisches Minus harmonisches Mittel ist also

$$\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b},$$

Multiplikation mit der positiven Zahl $2(a+b)$ ergibt

$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2.$$

Diese Zahl wird offenbar Null genau für den Fall $a=b$ und ist sonst offenbar größer als Null. Zur zweiten Frage: Hat man Geschwindigkeiten $v_1, \dots, v_n > 0$ für n gleiche Streckenabschnitte jeweils der Länge $s > 0$, so legt man den Weg ns in der Zeit $\frac{s}{v_1} + \dots + \frac{s}{v_n}$ zurück, hat also die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\frac{ns}{\frac{s}{v_1} + \dots + \frac{s}{v_n}} = \frac{1}{\frac{1}{n}(\frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n})}.$$

8. Äußere Parameter sind a, b , Unbestimmte sind α, β . Man hat die Gleichungsbedingung

$$\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}.$$

Diese ist mit der Zusatzbedingung, dass beide Seiten positiv sind, gleichwertig zur quadrierten

$$a + 2\sqrt{b} = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}.$$

Dies ist wieder (mit der angegebenen Aussage) gleichwertig zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= a \\ \alpha\beta &= b.\end{aligned}$$

Von diesem suchen wir nur Lösungen in natürlichen Zahlen. Es liegt nahe, etwa in die zweite Gleichung $a - \alpha$ für β einzusetzen, das ergibt

$$\alpha^2 - a\alpha + b = 0,$$

mit den Lösungen

$$\alpha_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Damit durch Einsetzen in die erste Zeile des Systems:

$$\beta_{1,2} = \frac{a}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Offenbar kann man α und β vertauschen. Wann sind α, β positive ganze Zahlen? Offenbar genau dann, wenn $a^2 - 4b$ eine Quadratzahl größer als Null ist. Genau dann ist nämlich die Wurzel $\sqrt{a^2 - 4b}$ rational und positiv. Ist das der Fall, so werden automatisch α und β ganz, da a gerade sein muss und somit $\sqrt{a^2 - 4b}$ gerade Zahl wird, so dass die Division durch 2 aufgeht. Wir behandeln das Beispiel $\sqrt{12 + 2\sqrt{20}}$. Hier ist $a = 12, b = 20$, also $\alpha = 6 + \frac{1}{2}\sqrt{144 - 80} = 10$ und $\beta = 6 - \frac{1}{2}\sqrt{144 - 80} = 2$, und so hat man

$$\sqrt{12 + 2\sqrt{20}} = \sqrt{10} + \sqrt{2}.$$

Zur Eindeutigkeit der Darstellung $a + 2\sqrt{b} = c + 2\sqrt{d}$ (dass man also $a = c$ und $b = d$ folgern kann) bei irrationaler \sqrt{b} und natürlichen Zahlen a, b, c, d kann man so gelangen: Kleine Umformung der Gleichung ergibt

$$a - c = 2(\sqrt{d} - \sqrt{b}),$$

es folgt, dass $\sqrt{d} - \sqrt{b}$ rational ist. Wenn $a = c$, so auch $b = d$, und wir sind fertig. Wäre $a \neq c$, so hat man nach Multiplikation der Gleichung mit $(\sqrt{d} + \sqrt{b})$

$$\begin{aligned}(a - c)(\sqrt{d} + \sqrt{b}) &= 2(d - b), \text{ also} \\ \sqrt{d} + \sqrt{b} &= 2\frac{d - b}{a - c},\end{aligned}$$

also wäre auch $\sqrt{d} + \sqrt{b}$ rational. Damit wäre auch die Differenz $\sqrt{d} + \sqrt{b} - (\sqrt{d} - \sqrt{b}) = 2\sqrt{b}$ rational, also \sqrt{b} rational entgegen der Voraussetzung.

Übung (2)

1. $\sqrt{x}(1-x)^5 = x^3$ ist algebraische Gleichung in x , aber wegen des gebrochenen Exponenten keine Polynomgleichung, und man darf allgemein keine exakt ausrechenbare Lösung erwarten. Aber im vorliegenden Fall lässt sich die Lösung $x = 0$ sofort einsehen. Weiter lässt sich graphisch einsehen, dass im Bereich $[0, 1]$ noch eine weitere Lösung liegt, die man näherungsweise bestimmen könnte, und dass keine weiteren Lösungen existieren. $(1-x)^6 = x\sqrt{a}$ ist Polynomgleichung 6. Grades in x , in Normalform (Binomialkoeffizienten verwenden!)

$$1 - (6 + \sqrt{a})x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6 = 0.$$

Aber auch eine solche Polynomgleichung ist mit $a \neq 0$ nicht exakt lösbar, sondern nur numerisch. Man kann allerdings graphisch einsehen, dass es genau zwei Lösungen gibt. Die Gleichung $x \sin(a) - 2 = (3-x) \cos^2(a)$ ist linear in x , eindeutige Lösung im Falle nicht verschwindenden Nenners: $x = \frac{2+3\cos^2 a}{\sin a + \cos^2 a}$. (Es gibt abzählbar unendlich viele Werte a , bei denen der Nenner Null wird.) Die letzte Gleichung ist nach Hochmultiplizieren von x quadratisch (aber nicht äquivalent zu dieser quadratischen Gleichung), die beiden verschiedenen Lösungen sind für $a < -\frac{3}{4}$: $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3-4a}$, außer wenn $a = -1$, dann wird nämlich eine davon Null und ist daher keine Lösung der ursprünglichen Gleichung. Für $a = -\frac{3}{4}$ hat man nur die eine Lösung $x = -\frac{1}{2}$, für $a > \frac{3}{4}$ keine reelle Lösung. Zusatzfragen: Die dritte Gleichung ist transzendent in a , aber mit der Umformung $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ wird sie eine quadratische in $\sin a$, wenn $x \neq 3$, sonst sogar eine lineare in $\sin a$. Man kann in beiden Fällen lösen und dann auch in a lösen, da man aus vorgeschriebenem Sinuswert mit Hilfe von \arcsin zu a gelangen kann bzw. bei Feststellung eines Sinuswertes außerhalb $[-1, 1]$ auf die leere Lösungsmenge schließen kann. Die letzte Gleichung ist natürlich linear in a .

2. Der Einheitskreis mit Mittelpunkt im Ursprung wird geschnitten mit der Ellipse, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen, mit großer Halbachse 2 und kleiner 1 (letztere in y -Richtung). Man erwartet also geometrisch vier Schnittpunkte, symmetrisch zu den Achsen gelegen. Zweckmäßig setzt man etwa $x^2 = 1 - y^2$ in die zweite Gleichung ein und erhält:

$$\begin{aligned} \frac{15}{4}y^2 &= \frac{3}{4}, \\ y &= \pm \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ damit} \\ x &= \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

3. $\sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k+1} = x - x^3 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^7 + \frac{1}{24}x^9$, das ist ein Polynom.

4. $\frac{1}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{8} - \frac{x^9}{10} + \frac{x^{12}}{12} - \frac{x^{15}}{14} = \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{2k+4} x^{3k}$.

5. $\binom{11}{7} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 3 \cdot 10 \cdot 11 = 330$.

6. (a) Weil bei Einheitenwechsel derselbe Faktor an beide Summanden im Zähler und im Nenner angebracht wird und sich daher wegekürzt. (Explizit rechnen.)

(b) $r_w - r_m = \frac{w-m}{w} - \frac{w-m}{m} = -\frac{(m-w)^2}{wm}$.

7. Man setzt etwa an: $f(x) = mx + b$ und erhält mit den Bedingungen $f(x_1) = mx_1 + b = 0$ und $f(x_n) = mx_n + b = 1$ ein lineares Gleichungssystem für m, b . Schöner ist es aber, gleich mit Zweipunkteform zu setzen:

$$f(x) = \frac{1}{x_n - x_1} (x - x_1).$$

Praktischer Nutzen: Messen verschiedene Leute auf verschiedenen Skalen (etwa Arbeitszufriedenheit auf einer Skala von 1 bis 10 oder von -10 bis 10), so kann man durch eine solche Transformation die Resultate vergleichbar machen.

8. Zu zeigen ist: $f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$, was man sofort nachrechnet mit $\frac{1}{2}m(x_0+x_1) + b = \frac{mx_0+mx_1+2b}{2}$. Dagegen $\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2) < \frac{x_0^2+x_1^2}{2}$ außer wenn $x_0 = x_1$, dann sind beide Werte gleich. Das kann man sich graphisch an der Parabel sofort klarmachen (Skizze!), aber auch rechnerisch etwa so einsehen: Die Differenz

$$\frac{x_0^2 + x_1^2}{2} - \frac{1}{4}(x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2)$$

multipliziert mit 4 ist

$$x_0^2 - 2x_0x_1 + x_1^2 = (x_0 - x_1)^2,$$

und diese Zahl ist als Quadrat stets ≥ 0 .

9. Malt man einen Querschnitt durch die Erde, entlang einem Längengrad, so sieht man, dass der Radius des betreffenden Breitenkreises $6378 \cdot \sin\left(\frac{40}{360} \cdot 2\pi\right) \approx 4099.7$ ist, der Umfang also immerhin noch etwa 25759 km beträgt.

Übung (3)

1.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j x^j \right) &= \sum_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m} a_i b_j x^{i+j} \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k, \text{ mit } c_k = \sum_{i+j=k, 0 \leq i, j} a_i b_j. \end{aligned}$$

Daher lautet der Koeffizient zu x^3 : $c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$.

2. $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, kombinatorisch: Die Anzahl 2^n aller Teilmengen einer Menge mit n Elementen ist die Summe der Anzahlen der k -elementigen Teilmengen für k von Null bis n .

$$3. \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n x_j \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_i x_j \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \quad (n^2 \text{ Summanden})$$

4. Die Beziehung $y > 2x + 3$ wird genau von den Koordinatendarstellungen oberhalb der Geraden $y = 2x + 3$ erfüllt, es ist also eine (offene) Halbebene, ohne ihre Begrenzungsgerade beschrieben. Das genannte Dreieck wird daher durch folgendes System von Ungleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} y &\leq x + 1 \\ y &\geq -2x + 1 \\ y &\geq 7(x - 2) - 3 = 7x - 17 \end{aligned}$$

5. Die erste Menge ergibt im ersten Quadranten mit $y \leq 1 - x$ ein Dreieck, das sich mit den symmetrischen Gegenstücken zu einem Quadrat (Fläche!) mit Diagonalen auf den Achsen ergänzt. Die zweite Menge ist der dies Quadrat einbeschreibende Kreis (Fläche!), die dritte Menge ist ein achsenparalleles Quadrat (wiederum die Fläche), das diesen Kreis einbeschreibt. Offenbar $a = \frac{1}{2}$.

6. Diese Aufgabe ist so gemeint, dass man die Darstellungen der gesuchten Vektoren durch \vec{a}, \vec{b} möglichst direkt sehen sollte: $\vec{x} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{z}$ (noch einmal erinnern an die Äquivalenzklassen), auch sehen: $\vec{y} = \vec{a} - \vec{x} =$ (ausrechnen) $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$.

7. Strahlensatzfigur!

8. Richtung in der Ebene: Ein Winkel genügt, im Raum: Zwei Winkel genügen (Längen- und Breitengrad!), Dreieck in Ebene mit genauer Lage: Drei Punkte, also 6 Zahlenangaben, Dreieck als geometrische Form mit genauen Maßen (also bis auf Kongruenz): 3 Angaben, wofür man mehrere Realisierungen anführen sollte wie: 3 Seitenlängen, oder 2 Seitenlängen und ein Winkel; Dreieck als Form abgesehen von der Größe (also bis auf Ähnlichkeit): 2 Winkel genügen; Parabel im dreidimensionalen Raum mit genauer Lage: 6 Zahlangaben genügen, etwa: 3 für den Scheitelpunkt, 2 für die Achsenrichtung, dazu eine für den Form-Streckungsfaktor

Übung (4)

1. Zweckmäßigkeit: Keine Fischgräten, Nutzen von dünneren und dickeren Linien.
2. (a) Eckpunkte $(2, 3, -1) + (\varepsilon_1 a, \varepsilon_2 a, \varepsilon_3 a)$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $1 \leq i \leq 3$
 (b) Obere Würfelseite: $\vec{x}(\lambda, \mu) = (2, 3, -1 + a) + (\lambda, \mu, 0)$, $-a \leq \lambda, \mu \leq a$.
 (c) $\vec{x}(\lambda) = (2 - a, 3 - a, -1 + a) + \lambda(2a, 2a, -2a)$, $0 \leq \lambda \leq 1$.
 (d) Achtung, im Aufgabentext fehlte fälschlich die Angabe, ob der Ausgangs-Eckpunkt vorn oder hinten liegt, für den hinteren lautet eine Parameterdarstellung: $\vec{x}(\lambda) = (2 + a, 3 + a, -1 + a) + \lambda(-2a, 0, -2a)$, $0 \leq \lambda \leq 1$. (Für den vorderen stünden die x -Koordinaten $2 - a$ im Aufpunktvektor, $2a$ im Richtungsvektor.)
 (e) $\vec{x}_{i,j,\varepsilon}(\lambda, \mu) = (2, 3, -1) + \lambda \vec{e}_i + \mu \vec{e}_j + \varepsilon a \vec{e}_k$, $-a \leq \lambda, \mu \leq a$, für i, j, k paarweise verschieden und $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Man sieht gut die Anzahl von sechs Seitenflächen.
3. Der Mittelpunkt von \overline{QR} ist $(3, 4)$, also geeignete Parameterdarstellung $\vec{x}_g(\lambda) = (3, -4) + \lambda(0, 8)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Gleichungsform: $(\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{4})^2 = 1$, Parameterform: $\vec{x}(t) = (2 \cos t, 4 \sin t)$, $0 \leq t < 2\pi$. Verschobene: $(\frac{x-2}{2})^2 + (\frac{y-3}{4})^2 = 1$, $\vec{y}(t) = (2, 3) + \vec{x}(t)$, $0 \leq t < 2\pi$. Bei der Gleichungsform wird die Gleichung für die zurückverschobene Ellipse aufgeschrieben, bei der Parameterform die Verschiebung an der ursprünglichen Ellipse angebracht.
5. Mit $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ (t-1)^2 + 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, wird der Graph der Funktion $f(t) = (t-1)^2 + 2$, $t \in \mathbb{R}$, parametrisiert, also eine Normalparabel, deren Scheitel zu $(1, 2)$ verschoben ist. Mit $\vec{y}(t) = \lambda \vec{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, wird ebenfalls eine Parabel parametrisiert: Wir haben

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \lambda t \\ \lambda(t-1)^2 + 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Führen wir den neuen Parameter $u = \lambda t$ (mit t durchläuft auch u alle reellen Zahlen!) ein, so entsteht

$$\vec{z}(u) = \begin{pmatrix} u \\ \frac{1}{\lambda}(u-\lambda)^2 + 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Parametrisiert ist also der Graph der Funktion $g(u) = \frac{1}{\lambda}(u-\lambda)^2 + 2\lambda$, $u \in \mathbb{R}$. Es handelt sich also um eine Parabel, deren Scheitel in $(\lambda, 2\lambda)$ sitzt und die mit $\frac{1}{\lambda}$ gestreckt ist in Achsenrichtung, was bei $\lambda > 1$ natürlich eine Stauchung bedeutet. Bei negativen Werten von λ ist die Parabel nach unten geöffnet.

6. Der Sehstrahl vom Auge zum allgemeinen Kreispunkt $\vec{x}(t)$ hat folgende Parameterdarstellung (t wird zum äußeren Para

$$\vec{y}_t(\lambda) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos t - 5 \\ \sin t \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Schnittbedingung für den Schnitt mit der Ebene $x = 2$:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos t - 5 \\ \sin t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten aus der Bedingung für die erste Koordinate

$$\lambda = \frac{3}{5 - \cos t}$$

und damit den Schnittpunkt

$$\vec{u}_t = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3 \sin t}{5 - \cos t} \\ 1 - \frac{3}{5 - \cos t} \end{pmatrix}.$$

Die Menge aller Bildpunkte auf dem 'Bildschirm' $x = 2$ ist also parametrisiert mit

$$\vec{v}(t) = \vec{u}_t, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Auf dem Bildschirm benötigt man nach Einführen eines naheliegenden (y, z) -Systems nur noch diese beiden Koordinaten und findet eine Ellipse, die hier nun wahrlich eigenartig parametrisiert ist. Eine Ellipse sollte man aus eigener Anschauung vermuten. Malt man mittels eines Computerprogramms die Kurve auf, so bestätigt sich das qualitativ. Da wir nun bereits eine Ellipse als Resultat vermuten, können wir das auch rechnerisch bestätigen, indem wir uns die Halbachsenlängen $\frac{1}{4}\sqrt{6}$ (das sieht man allerdings erst über die Ableitung des Ausdrucks) und (elementar, für die Halbachse in z -Richtung) $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})/2 = \frac{1}{8}$ klarmachen anhand der Koordinatenausdrücke, ferner den Mittelpunkt $(0, \frac{3}{8})$. Nun bleibt zu bestätigen:

$$\left(\frac{\frac{3 \sin t}{5 - \cos t}}{\frac{1}{4}\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{1 - \frac{3}{5 - \cos t} - \frac{3}{8}}{1/8} \right)^2 = 1$$

Das ist mit etwas Arbeit leicht zu tun. Die linke Seite ist

$$\frac{24 \sin^2 t + (1 - 5 \cos t)^2}{(5 - \cos t)^2} = \frac{25 - 10 \cos t + \cos^2 t}{(5 - \cos t)^2} = 1.$$