# Übung (16)

(1) Man hat $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$, also insbesondere

$$U(t)I(t) = \frac{1}{2}\left(\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)\right),$$

und der fragliche Mittelwert ist

$$\begin{aligned} & \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} dt \frac{1}{2}\left(\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)\right) \\ = & \frac{\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \cos(\varphi)\, dt + \frac{\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \cos(2\omega t + \varphi)\, dt \\ = & \frac{1}{2}\cos(\varphi). \end{aligned}$$

Denn das letzte Integral ist Null, wie man schon weiß, aber auch noch einmal ausrechnen kann.

(2) Es ist die Geschwindigkeit zur Zeit $t$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t dt \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}_0^t = \begin{pmatrix} \sin t \\ 2 - \cos t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog ist daher der Ort zur beliebigen Zeit $t$

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t dt \begin{pmatrix} \sin t \\ 2 - \cos t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos t \\ 2t - \sin t \\ \frac{1}{6}t^3 \end{bmatrix}_0^t = \begin{pmatrix} 2 - \cos t \\ 2t - \sin t \\ \frac{1}{6}t^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Bahn ist also eine Schraube, die in $y-$ Richtung wegdriftet (mit $2t$) und sich in $z-$ Richtung hochdreht, bei $t = 0$ zunächst sehr langsam (Winkel 0 zur $xy-$ Ebene), dann immer steiler. Aus der positiven Richung der $z-$ Achse auf die $xy-$ Ebene gesehen ist die Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn mit wachsendem $t$.

(3) Nach Formel für das Rotationsvolumen hat man (oberen Teil der Ellipse als Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ aufgefasst):

$$V = \int_{-a}^{a} \pi b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi b^2 a.$$

Das Integral ist sehr einfach, man lasse sich nicht durch die Konstanten darüber täuschen. Man sollte überlegen: Für $a = b$ entsteht die korrekte Volumenfomel für die Kugel. Die Asymmetrie rührt von der Rotation um die $x-$ Achse: Querschnitte sind Kreise mit Radien proportional zu $b$. Das Volumen sollte mittlerer Querschnitt mal Länge (in $x-$ Richtung) sein, also proportional zu $b^2$ und zu $a$.

(4) Zuerst muss dividiert werden mit Rest, damit für den Rest die Voraussetzung der Partialbruchzerlegung erfüllt ist:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2-1}dx &= \int \left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx \\ &= \int \left(1+\frac{1}{2\,(x-1)}-\frac{1}{2\,(x+1)}\right)dx \\ &= x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1\,|\,(+c).\end{aligned}$$

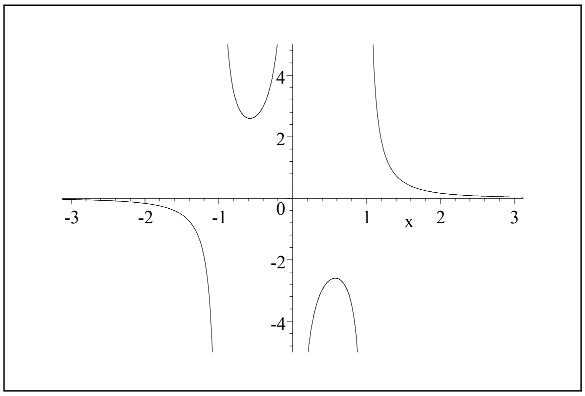
(5) Koeffizienten der Partialbruchzerlegung im Kopf!

$$\int \frac{1}{x\,(x-1)\,(x+1)}dx = -\ln x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|\,(+c).$$

Der neue Integrand ist der alte, um 1 nach rechts verschoben, und so entsteht auch die neue Schar von Stammfunktionen:

$$\int \frac{1}{x\,(x-1)\,(x-2)}dx = -\ln x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-2|\,(+c).$$

Für die grob qualitative Gestalt des Graphen von $f(x)=\frac{1}{x(x-1)(x+1)}$ genügt es, neben der Symmetrie zu beachten: bei $0,1$ (und auch $-1$) sind Pole, zum Pol bei Null gehört für $x>0$ negatives Vorzeichen: Dazu sehe man nur, dass das Vorzeichen im ganzen Bereich $]0,1[$ negativ ist. Das erzwingt auch ein relatives Maximum in diesem Bereich. Entpsrechend sieht man das positive Vorzeichen für $x>1$. Dazu tritt die Dominanz des Nenners für große $|x|$. Damit hat man die Gestalt schon gefunden, weiß nur noch nicht, wo genau die Extrema liegen - tragen Sie noch die Pole gestrichelt ein!




Die Extrema kann man auch ausrechnen, weil die entsprechende Gleichung ein quadratisches Polynom ergibt: $\frac{d}{dx}\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{1-3x^2}{x^2(x-1)^2(x+1)^2}$. Die Nullstellen sind also $x=\pm\sqrt{3}/3$. (Nach Prüfung, dass der Nenner dort nicht Null ist.) Dazu kommt das Argument, dass die grobe Skizze *mindestens* zwei Extrema zeigte. Mit den einzusehenden Vorzeichenwechseln der Ableitung kann man diese Extrema auch mit Rechnung allein bestimmen.

(6) Mit Umkehrung der Kettenregel (oder auch Substitutionsschema $u=\sin(x)$)

$$\int \sin(x)\cos(x)dx=\int u du=\frac{1}{2}u^2=\frac{1}{2}\sin^2(x)+c$$

Mit algebraischer Umformung:

$$\int \sin(x)\cos(x)dx=\int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx=-\frac{1}{4}\cos(2x)+c$$

Der anzubringende Kommentar: *Keineswegs* gilt $\sin^2 x = -\frac{1}{4}\cos(x)$, aber $\frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2x)$, also sind dieselben Scharen von Stammfunktionen mit der Addition beliebiger Konstanten parametrisiert, es sind zwei Parametrisierungen derselben Schar. Daher ist nicht etwa eines der Resultate falsch.

(7) Mit $u = x + 1$ bekommt man

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \int \left(u^{1/2} - u^{-1/2}\right) du = \frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2} \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} - 2\sqrt{u} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{x+1}.\end{aligned}$$

Mit partieller Integration: $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = x \cdot 2\sqrt{x+1} - \int 2\sqrt{x+1}dx = 2x\sqrt{x+1} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2}$. In diesem Falle hat man keine Umparametrisierung - beide Ausdrücke stellen dieselbe Funktion dar.

(8) Mit $u = 1 + \sqrt{x}$, $x = (u-1)^2$, $dx = 2(u-1)\,du$ hat man:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{2u-2}{u}du = 2u - 2\ln|u| = 2 + 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}).$$

Ohne die Konstante 2 hat man eine einfachere Stammfunktion.

# Aufgaben zum Wochenende (4)

(1) (a) (i) $g$ hat Richtungsvektor $\vec{a} = (1, 2, 1)$, der nicht senkrecht zum Normalenvektor von $E$ steht. Also ist $g$ nicht parallel zu $E$, so dass es einen einzigen Schnittpunkt geben muss. (Den auszurechnen, war nicht verlangt, aber man sollte das leicht tun können.)

(ii) Die parallele Ebene zu $E$ durch $P$ hat Normalenform $2x - 3y + z = -6$, also Abstand $7\sqrt{14}/14 = \sqrt{14}/2$.

(iii) $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, etwa 0.421 im Bogenmaß, etwas mehr als 24 Grad.

(iv) Man hat den Betrag des Lotvektors (mit obenstehendem Richungsvektor $\vec{a}$ für $g$)

$$\vec{l} = \vec{x}_R - \vec{x}_P - \frac{(\vec{x}_R - \vec{x}_P)\,\vec{a}}{\vec{a}^2}\vec{a}$$

zu bilden, und das ergibt:

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-5}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{5}{6}\sqrt{30}.$$

(v) Flächeninhalt des Dreiecks ist $\frac{1}{2}\left|(\vec{x}_R - \vec{x}_P) \times (\vec{x}_P - \vec{x}_Q\right|$ (wir wählen bequem, was wir schon haben), also

$$\frac{1}{2}\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{29}.$$

(b) Hier ist eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge:

$$\vec{x}(\lambda) = (0, 0, 1) + \lambda (4, 1, -5), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Geometrisch: Man hat drei Ebenen geschnitten, bei denen die Schnittgerade von zweien jeweils in der dritten liegt. Die zugehörige lineare Abbildung wird durch die Matrix zu diesem System vermittelt, und der Kern dieser Abbildung besteht aus allen Vielfachen von $(4, 1, -5)$.

(c) *) Die Bedingung ergibt sofort die Gleichung (wir arbeiten mit Betragsquadraten, wie allgemein empfohlen):

$$z^2 = x^2 + y^2 + (z-2)^2,$$

vereinfacht also

$$z = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 1.$$

Das ergibt eine Paraboloidoberfläche, Achse ist die $z-$ Achse, der Scheitelpunkt ist $(0, 0, 1)$, Schnitt mit der Ebene $z = a$ für $a > 1$ ergibt einen Kreis vom Radius $2\sqrt{a-1}$ (für $a = 1$ nur den Scheitelpunkt). Man beachte die Drehsymmetrie um die $z-$ Achse. Die Schnitte mit Ursprungsebenen senkrecht zu $xy-$ Ebene ergeben Parabeln immer gleicher Form. Man könnte nun eine Parametrisierung über Drehung einer Parabel angeben. Aber das ist hier nicht einmal schön, weil dann der Scheitel zu beliebigem Winkelwert herauskommt, also die Parametrisierung nicht injektiv wäre. Viel einfacher und in diesem Sinne auch besser ist:

$$\vec{x}(\lambda, \mu) = \left(\lambda, \mu, \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\mu^2 + 1\right), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(2) (a) Eindeutige Lösung ist $z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j$.

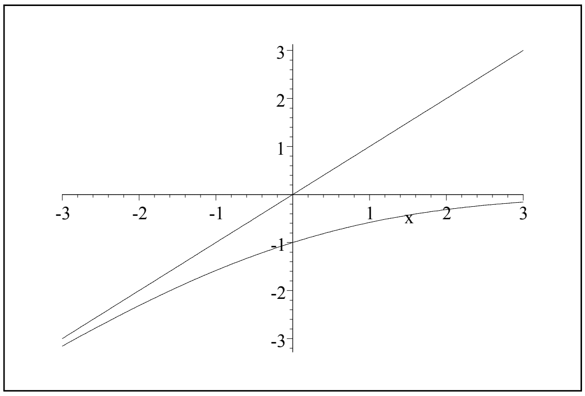
(b) Man sollte sehen, dass die zweite Zahl zum Winkel $-\pi/3$ gehört, also ist der gefragte Winkel $\pi/3 - \pi/4 = \frac{1}{12}\pi$.

(3) (a) $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x$. (Ableitung: $\frac{1}{2(x+1)\sqrt{1+\ln(x+1)}}$, also an der Stelle $x_0 = 1$ : Wert $\frac{1}{2}$.)

(b) Der Definitionsbereich ist $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Symmetrisch zur $y-$ Achse. Vorzeichen überall positiv. Einzige Nullstellen sind $x = 0$ und die Randpunkte des Definitionsbereichs, es gibt daher mindestens zwei Maxima. Qualitativ sieht man mit grober Skizze noch, dass auch mindestens zwei Wendepunkte vorliegen. Es ist $g'(x) = x\frac{4-3x^2}{\sqrt{2-x^2}}$, also liegen die Maxima bei $\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$. (Zur genauen Lage der Wendepunkte s.u. Nr. 7.) Ferner sieht man auch an der Ableitung die unendlichen Steigungen an den Randpunkten.

(c) $g_1(x) = 2g\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\frac{x^2}{4}\sqrt{2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4}x^2\sqrt{8 - x^2}$. Aufpassen, dass man innen nicht den Faktor 2 anzubringen hat - der neue Definitionsbereich bestätigt die eingetretene Streckung.

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-e^x} = -1$, also liegt eine 'behebbare' Definitionslücke vor: Zuweisung des Wertes $-1$ an der Stelle $x = 0$ ergibt eine stetige Fortsetzung. (Mehr war nicht verlangt! Man sollte jedoch zur Übung noch mittels Vorzeichenüberlegung und der Einsicht in das Verhalten für $x \to \infty$, $x \to -\infty$ den Graphen zeichnen - man sieht die Asymptoten $y = x$ und $y = 0$):




Ferner kann man noch an der Ableitung sehen, dass die Funktion streng monoton steigt: $\frac{d}{dx}\frac{x}{1-e^x} = \frac{1-e^x+xe^x}{(1-e^x)^2}$.)

(e) Erstes: $1/\alpha-$ Regel: $\int dx\sqrt{2 - \frac{1}{4}x} = \frac{1}{2}x\sqrt{8 - x}$, zweites: Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(2x-1)(3-4x)} &= \frac{1}{2(2x-1)} - \frac{3}{2(4x-3)}, \text{ also} \\
\int \frac{x}{(2x-1)(3-4x)}dx &= \frac{1}{4}\ln|2x-1| - \frac{3}{8}\ln|4x-3|
\end{aligned}$$

Achtung: Wenn Sie für den zweiten Term '$+\frac{3}{2(3-4x)}$' geschrieben haben, so erhalten Sie am Ende dasselbe, weil mit $1/\alpha-$ Regel der Faktor $-\frac{1}{4}$ kommt. Zum dritten Integral beachte man, dass im Zähler bis auf einen konstanten Faktor die Ableitung des Nenners steht:

$$\int \frac{x^2}{1-x^3}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3x^2}{1-x^3}dx = -\frac{1}{3}\ln\left|1 - x^3\right|$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)}dx &= \int \left(x+3-\frac{1}{-1+x}+\frac{8}{x-2}\right)dx \\
&= \frac{1}{3}x^3+3x-\ln|x-1|+8\ln|x-2|\,, \\
\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{1}{2}\int \frac{-2xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}, \\
\int x^2e^xdx &= x^2e^x - \int 2xe^xdx = x^2e^x-2xe^x+\int 2e^xdx \\
&= e^x\left(x^2-2x+2\right)
\end{aligned}
$$

(5) Setzen wir $f(x)=\alpha\ln(x)$, dann hat man (für eine Zahl $x_0$) folgende Bedingungen zu erfüllen: $\alpha\ln(x_0)=x_0$, $f'(x_0)=\frac{\alpha}{x_0}=1$. Also $x_0=\alpha$, und $\ln(\alpha)=1$, also $\alpha=e$.

(6) Die Graphen werden auf $[-1,1]$ mit wachsendem $n$ immer kastenförmiger, nur ist die Breite des Kastens 2. Außerhalb schnelles Wachstum ins Unendliche. Also bieten sich die Kehrwerte an, wobei man noch den Pol vermeiden muss, man nimmt also etwa

$$g_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}.$$

Auf $[-1,1]$ haben wir nun nahezu konstant den Wert 1 (für große $n$), der dann zu beiden Seiten abrupt gegen Null abfällt. Für Breite, Höhe, Lage bringt man noch Konstanten an und bildet allgemein

$$\frac{h}{1+(x-a)^{2n}}+b$$

(Welche Konstante regelt was?)

(7)

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\sqrt{2-x^2}\right)=-2\frac{3x^4-9x^2+4}{(-2+x^2)\sqrt{2-x^2}},$$

also lautet die notwendige Bedingung für Wendestellen:

$$x^4-3x^2+\frac{4}{3}=0.$$

Achtung - zusätzlich ist die Bedingung zu erfüllen: $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ (!). Wir führen die neue Unbestimmte $u=x^2$ und erhalten die beiden reellen Lösungen

$$u_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{6}\sqrt{33},$$

davon kommt aber nur $\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{33}$ in Frage, weil $\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{33}>\sqrt{2}$. Also kommen die beiden (reellen) Wurzeln von $\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{33}$ heraus, und die Wendepunkte müssen liegen an den Stellen

$$\pm\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{33}}=\pm\frac{1}{6}\sqrt{54-6\sqrt{33}}.$$

Denn laut grober Skizze musste es zwei Wendepunkte geben, mit diesen einzigen Nullstellen der zweiten Ableitungen (im Definitionsbereich!) kann es auch nicht mehr Wendepunkte geben.