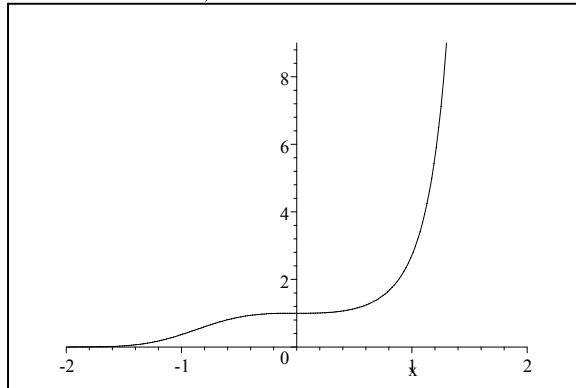


Übung (12)

- (1) Auch ohne die Ableitung folgt streng monotonen Steigen. Die Ableitung ist $x^2 e^{x^3}$ und macht das ihrerseits ebenfalls klar, zeigt zusätzlich, dass die Steigung gegen Null geht für $x \rightarrow -\infty$ und gegen ∞ für $x \rightarrow \infty$. Es ist damit ohne zweite Ableitung klar, dass bei $x = 0$ ein Wendepunkt liegt (die Flachstelle von x^3 setzt sich durch). Damit sollte eine Skizze einfach sein:

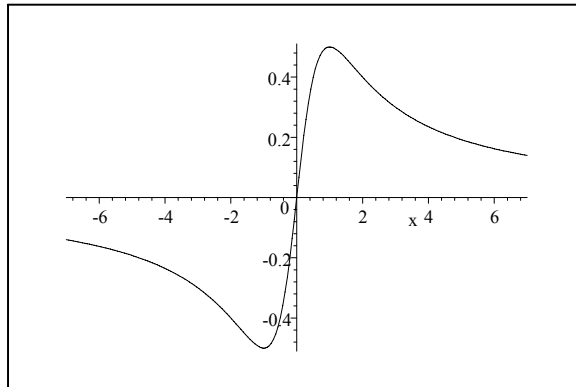


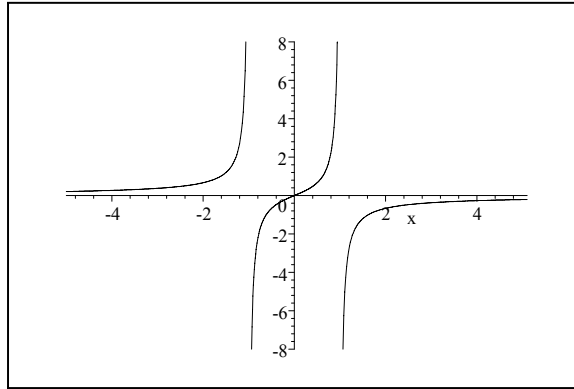
Qualitativ ist es klar, dass es einen weiteren Wendepunkt geben muss im Bereich $x < 0$, eine Stelle (lokal) maximaler Steigung. Die zweite Ableitung sagt, wo diese Stelle liegt:

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{x^3} = 3x e^{x^3} (2 + 3x^3).$$

(Faktorisieren, wir suchen nach Nullstellen!) Also liegt der zweite Wendepunkt bei $x = -\frac{1}{3} \sqrt[3]{18}$.

- (2) Bei der Schar $f_c(x) = \frac{x}{1+cx^2}$, $c \in \mathbb{R}$, hat man die drei Fälle $c < 0$, $c = 0$, $c > 0$ zu betrachten. $c = 0$ ergibt offenbar die Gerade $y = x$. Alle Funktionen sind ungerade. Für $c > 0$ ist f_c überall definiert, mit dem einfach zu klärenden Graphen. Einzige Extrema liegen bei $\pm \sqrt{1/c}$. (Ableitung: $\frac{d}{dx} \frac{x}{1+cx^2} = \frac{1-cx^2}{(1+cx^2)^2}$.) Sie rücken also mit wachsendem Wert von $c > 0$ immer dichter zusammen, für $x \rightarrow \pm\infty$ gehen die Werte entsprechend schneller nach Null. Die Höhe der Extrema sollte man ebenfalls anschauen: $f_c\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$, der Abstand von der x -Achse wird also mit wachsendem $c > 0$ immer geringer. Nun der Fall $c < 0$: Es gibt Pole bei $x = \pm \sqrt{1/-c}$, dafür keine Extrema. Die Ableitung ist überall größer als Null, in allen Ästen monotonen Steigen. Damit sind auch diese Graphen klar. Die Pole rücken dichter zusammen mit fallendem $c < 0$. Hier die Graphen für $c = \pm 1$ - man beachte, dass die Steigungen nicht korrekt erscheinen, weil die Achseneinheiten nicht dieselben sind:





- (3) Die Funktion $h(x) = \sqrt[3]{\arctan(x)}$ ist überall definiert, ungerade, streng monoton steigend. Sie sieht ähnlich aus wie $\arctan(x)$, mit dem Unterschied, dass die Steigung in $x = 0$ unendlich groß ist, was die Ableitung auch zeigt: $\frac{d}{dx} \sqrt[3]{\arctan(x)} = \frac{1}{3} \frac{1}{\arctan^{2/3}(x)(1+x^2)}$. (Die Ableitung ist eine gerade Funktion, Werte gehen nach Null für $x \rightarrow \pm\infty$, nach ∞ für $x \rightarrow 0$.)
- (4) Man sollte erwarten: $\frac{d}{dt} e^{j\omega t} = \omega j e^{j\omega t}$. Tatsächlich ergibt sich genau dies bei Auffassung der Kurve als Kurve im \mathbb{R}^2 mit komponentenweiser Ableitung:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Formal als komplexe Zahl geschrieben: $\omega(-\sin(\omega t) + j \cos(\omega t)) = \omega j (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) = \omega j e^{j\omega t}$. Geometrisch kann man sehen, dass die Ableitung den Vektor mit ω streckt und mit $\pi/2$ entgegen dem Uhrzeigersinn dreht, was der Multiplikation mit ωj entspricht.

- (5) Aussehen: An ein gerades Stück wird ein Viertelkreis angesetzt. Beide Ableitungen sind Null für $x < 0$. $\frac{d}{dx} (1 - \sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x$, $\frac{d^2}{dx^2} (1 - \sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$, also stimmen die ersten Ableitungen von beiden Seiten mit $x \rightarrow 0$ überein mit Wert Null, aber nicht die zweiten. Somit existiert die zweite Ableitung der zusammengesetzten Funktion nicht. Die einseitig gebildeten zweiten Ableitungen springen von 0 auf 1 an der Stelle $x = 0$.
- (6) $\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)}$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$). Also $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für alle x mit $-1 < x < 1$.
Hinweis: Man nutzt $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$, setzt dann etwa y für $\sin(x)$ und hat derart: $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ für $-1 < y < 1$. Zuletzt benennt man die unabhängige Variable

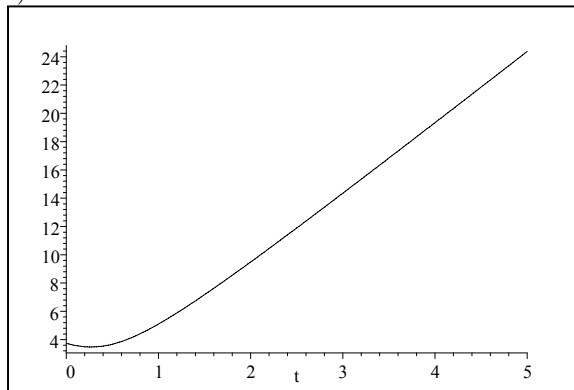
ins Übliche x um.

- (7) $\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x^2}$ existiert und hat den Wert $-\frac{1}{2}$, da Zähler und Nenner für $x \rightarrow 1$ nach Null gehen und $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-2x} = -\frac{1}{2}$. (Dies ergibt sich einfach aus dem Wert dieser in $x = 1$ stetigen Funktion!)
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2(x)}{(1-x)^2}$ - auch hier ist die Regel anwendbar, da Zähler und Nenner nach Null gehen. Aber erst zweimalige Anwendung der Regel führt zum Ziel: Zunächst erhält man $\frac{2\ln(x)/x}{-2(1-x)} = \frac{\ln(x)}{x-1}$, dann hat man wieder die Voraussetzungen zur Anwendung der Regel erfüllt und bekommt $\frac{1/x}{1}$, was bei $x = 1$ den Wert 1 hat. Also ist $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ und damit auch $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2(x)}{(1-x)^2} = 1$.

- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ existiert nicht einmal als $'\infty'$, da die Vorzeichen auf beiden Seiten der Null verschieden sind. Anwendung der Regel kommt nicht in Betracht, da die Voraussetzungen dafür nicht erfüllt sind. Fälschliche Anwendung ergäbe einen Grenzwert Null!
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} = 0$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, da dies mit einmaliger Anwendung der Regel für $n = 1$ gilt und aus der Gültigkeit für n auf die für $n + 1$ wie folgt geschlossen werden kann: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)x^n}{e^x} = 0$, da nach Induktionsvoraussetzung $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ und die Multiplikation mit der Konstanten $n + 1$ daran nichts ändert.

Übung (13)

- (1) $\frac{d}{dt} \arctan(2t-3) = \frac{2}{1+(2t-3)^2} = \frac{1}{2t^2-6t+5}$, $\frac{d}{dx} \frac{1}{(1-x^3)^4} = \frac{12x^2}{(1-x^3)^5}$, $\frac{d}{dx} (x^2 \tan(x)) = x(x+2 \tan(x) + x \tan^2(x))$.
- (2) Man überlegt, dass alle Graphen für $\alpha \neq 0$ durch Stauchen längs der x - Achse und eventuell ($\alpha < 0$) Spiegeln an der y - Achse aus dem Graphen von $\frac{e^x}{1+e^x}$ hervorgehen. Bei dieser Funktion ist klar, dass die Werte gegen Null gehen für $x \rightarrow -\infty$ und gegen 1 für $x \rightarrow \infty$. (So also auch allgemein für $\alpha > 0$ und andersherum für $\alpha < 0$.) Die erste Ableitung macht das monotone Steigen ($\alpha > 0$) klar, die zweite ist Null genau für $x = 0$. Also ist bei $x = 0$ der Wendepunkt mit maximaler Steigung ($\alpha > 0$) bzw. minimaler Steigung ($\alpha < 0$). Man hat $\frac{d}{dx} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^{\alpha x}} = \alpha \frac{e^{\alpha x}}{(1+e^{\alpha x})^2}$, $\frac{d^2}{dx^2} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^{\alpha x}} = \alpha^2 e^{\alpha x} \frac{1-e^{\alpha x}}{(1+e^{\alpha x})^3}$.
- (3) Die Funktion $g(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$ ist gerade und zunächst bei $x = 0$ undefiniert. De L'Hospitalsche Regel macht jedoch klar, dass man mit Wert 1 stetig ergänzen kann. Die Ableitung ist $\frac{d}{dx} \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{x - (1+x^2) \arctan(x)}{(1+x^2)x^2}$. Dass die Ableitung ≤ 0 ist für $x \geq 0$, kann man mit dem Satz vom endlichen Zuwachs sehen: $x - (1+x^2) \arctan(x) \leq 0$, da dies für $x = 0$ gilt und die entsprechende Ungleichung für die Ableitungen besteht: $1 - 2x \arctan(x) - 1 \leq 0$ für $x \geq 0$. Es ist die Ableitung sogar für $x = 0$ stetig zum Wert Null zu ergänzen, weil der Quotient der Ableitungen zu $\frac{x - (1+x^2) \arctan(x)}{(1+x^2)x^2}$ lautet: $\frac{-2x \arctan(x)}{2x+4x^3}$, dazu wiederum $\frac{-2 \arctan(x) - \frac{2x}{1+x^2}}{2+12x^2}$, und jetzt hat man den Wert Null für $x = 0$. Dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{x} = 0$, kann man wieder direkt mit de L'Hospital sehen.
- (4) Bei der Flugparabel $\vec{x}(t) = (1, 2, 2) + t(2, -1, 3) + \frac{1}{2}t^2(3, 1, -4)$, $t \in \mathbb{R}$, sind Ort und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$: $(1, 2, 2)$, $(2, -1, 3)$. Der Beschleunigungsvektor ist $(3, 1, -4)$ (für beliebigen Wert von t). Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors ist $|(2, -1, 3) + t(3, 1, -4)| = \sqrt{14 - 14t + 26t^2}$. Das kann man nun aufmalen (quadratische Ergänzung liefert $\sqrt{26(t - \frac{7}{26})^2 + \frac{49}{26}}$, und die Wurzel ist monoton):



und sehen, dass der Betrag zunächst leicht sinkt, dann aber im Wesentlichen linear ansteigt. Man hat ferner $((2, -1, 3) + t(3, 1, -4)) \cdot (3, 1, -4) = 26t - 7$, das wird Null für $t = \frac{7}{26}$, und $\vec{x}(\frac{7}{26})$ ist der Scheitelpunkt, genau dort wurde der geringste Betrag der Geschwindigkeit beobachtet.

- (5) Die mittlere Steigung von \sin auf $[x, x + k \cdot 2\pi]$, für $x \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, k ganz, ist stets Null, da die Funktionswerte an den Randpunkten gleich sind. Die mittlere Steigung von \sin auf $[0, \pi/2]$ ist $\frac{2}{\pi}$. Diese tritt lokal auf bei $\cos(x) = \frac{2}{\pi}$, also bei $\arccos(\frac{2}{\pi})$.
- (6) Der Gradient von $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ an beliebiger Stelle (x, y, z) ist $(4x, 6y, 2z)$, an der Stelle $(1, 1, 1)$ also $(4, 6, 2)$. Dieser Vektor steht senkrecht auf der Fläche im Punkt $(1, 1, 1)$. Eine Normalenform der Tangentialebene ist daher $4x + 6y + 2z = 12$.

- (7) Zu $f(x, y) = 2xe^y - y^2$ ist in Näherung 1. Ordnung (Gradient $(2e^y, 2xe^y - 2y)$, an der Stelle $(1, 1)$ also $(2e, 2e - 2)$)

$$f(1.1, 0.9) \approx 2e - 1 + 2e \cdot \frac{1}{10} - (2e - 2) \frac{1}{10} = 2e - \frac{4}{5}.$$

Der absolute Fehler ist

$$f(1.1, 0.9) - 2e + \frac{4}{5} = -0.0354, \text{ der relative Fehler}$$

$$\frac{f(1.1, 0.9) - 2e + \frac{4}{5}}{f(1.1, 0.9)} = -0.0077.$$

- (8) Die Ungleichung $\ln(x) \leq x$ gilt für $x = 1$ und für die Ableitungen: $\frac{1}{x} \leq 1$ für $x \geq 1$. Also gilt sie mit dem Satz für alle $x \geq 1$. Für $0 < x < 1$ hat man $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ (die Ungleichung ist ohnehin klar, folgt aber auch direkt aus der schon bewiesenen), also mit $x > 0$ auch das Verlangte.

Übung (14)

- (1) $\int_{-1}^2 4dx = 12$, $\int_2^{-1} 4dx = -12$. (Mittelwert mal Intervallbreite, dazu Orientierungsvorzeichen!)
 $\int_{-1}^1 \sin(x) \arctan^2(x) dx = 0$, ungerade Funktion bei symmetrischen Grenzen.
- (2) $\int_{-1}^1 x^{2n} dx = 2 \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{2}{2n+1}$, $n \geq 1$. Das geht mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null, wie man sich auch graphisch klarmacht.
- (3) Mit Rechtecken (gar nicht übel!):

$$0.4186 \leq 0.6 \cdot e^{-0.36} \leq \int_0^{0.6} e^{-x^2} dx \leq 0.6.$$

Mit Trapezen noch wesentlich besser:

$$0.5093 \leq 0.6 \cdot \frac{e^{-0.36} + 1}{2} \leq \int_0^{0.6} e^{-x^2} dx \leq 0.6 \cdot e^{-0.09} \leq 0.5483.$$

Obersumme:

$$0.5626 \geq 0.2 \cdot (e^0 + e^{-0.2^2} + e^{-0.4^2}) \geq \int_0^{0.6} e^{-x^2} dx,$$

Untersumme:

$$0.5021 \leq 0.2 \cdot (e^{-0.2^2} + e^{-0.4^2} + e^{-0.6^2}) \leq \int_0^{0.6} e^{-x^2} dx$$

Die groben Unter- und Obersummen sind also schlechter als die Trapeze. Über das angesprochene arithmetische Mittel erhält man den Näherungswert

$$0.6 \cdot \frac{1}{3} \cdot (e^{-0.1^2} + e^{-0.3^2} + e^{-0.5^2}) \approx 0.5366.$$

Man beachte die Qualität dieser Näherung - es handelt sich übrigens um die beste Einteilung.

- (4) Der Mittelwert von $\frac{1}{1+(2x)^2}$ im Bereich $[1; 3]$ ist $\frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{4} \arctan(6) - \frac{1}{4} \arctan(2)$.
- (5)

$$\int_0^{\pi/4} \cos(4t) dt = 0, \text{ (auch direkt zu sehen!)}$$

$$\int \frac{2}{2x+1} dx = \ln|2x+1|,$$

$$\int \frac{\sqrt{2x^4+1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \frac{3}{7} \sqrt{2x^4+1} + 3\sqrt[3]{x},$$

$$\int \left(1 - \frac{x}{5}\right)^{30} dx = -\frac{5}{31} \left(1 - \frac{1}{5}x\right)^{31},$$

$$\int \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}}.$$

(a) $\int dx \ln((3x-1)^5) = \int 5 \ln(3x-1) dx = 5(3x-1) \ln(3x-1) - 5(3x-1),$

$$\int dx \cos^2(x) = \int dx \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x),$$

$$\int \frac{1}{2+3x^2} dx = \int \frac{1/2}{1+(\sqrt{3/2}x)^2} dx = \frac{1}{6} \sqrt{6} \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right).$$

(b) $\int \sin(x) \sqrt{1+\cos(x)} dx = -\frac{2}{3} (1+\cos(x))^{3/2},$

$$\int x \cos(1-x^2) dx = -\frac{1}{2} \sin(1-x^2).$$

(6) $\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \int dx \cos(x) = -x \cos(x) + \sin(x)$

(7) Allgemein $f(x) = 2 + \int_1^x e^{-2t} dt = 2 + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$. $f(3) = 2 + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-6}$.

(8) Mit $u = \sqrt{x}$ hat man $x = u^2$ und also $dx = 2udu$, somit

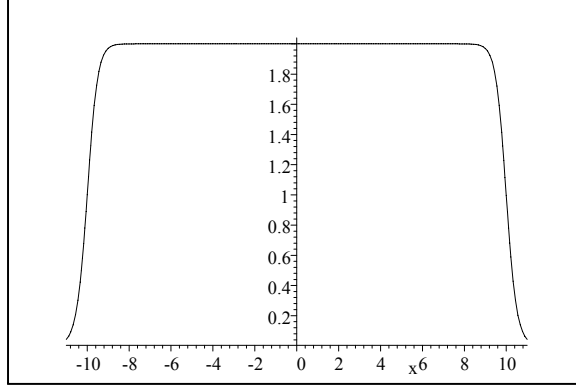
$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int 2ue^u du = 2ue^u - 2e^u = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1).$$

Übungen zum Wochenende (4)

- (1) $\sin(x + \pi/4) \approx \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}x$ für kleine $|x|$ in Näherung erster Ordnung.
 (2) Mit $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ hat man $f'(x) = 1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{1-x^2}(1-x^2)}$, also $f'(0) = 1$, damit $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} \approx 1 + x$ für kleine $|x|$.
 (3) $e^{-\frac{t}{2} \ln(3)} \sin(t)$ wäre ein Beispiel.
 (4) $\frac{1}{1+x^{2n}}$ ist ein guter Anfangspunkt, offenbar wird der Abfall steiler mit wachsendem n . Wir bringen noch Parameter für die Höhe und Breite an:

$$f(x) = \frac{h}{1 + \left(\frac{1}{\alpha}x\right)^{2n}}.$$

Hier ist das Beispiel $h = 2, \alpha = 10$:



(a)

$$\begin{aligned} \int \ln(2x-1) dx &= \frac{1}{2}(2x-1) \ln(2x-1) - \frac{1}{2}(2x-1), \\ \int \frac{1}{x/2+1} dx &= 2 \ln \left| \frac{x}{2} + 1 \right|, \\ \int \frac{1}{(2x-1)^5} dx &= -\frac{1}{8(2x-1)^4} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int x \ln(x) dx &= x(x \ln x - x) - \int (x \ln x - x) dx, \text{ also} \\ \int x \ln(x) dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2. \\ \int e^{-x} \sin(x) dx &= -e^{-x} \cos(x) - \int -e^{-x} \cos(x) dx \\ &= -e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x) - \int e^{-x} \sin(x) dx, \text{ also} \\ \int e^{-x} \sin(x) dx &= -\frac{1}{2}e^{-x} (\sin(x) + \cos(x)). \\ \int 1 \cdot \arctan(x) dx &= x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2-1)(x-2)} dx &= \int \left(\frac{-1/2}{x-1} + \frac{1/6}{x+1} + \frac{1/3}{x-2} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-2|. \\
\int \frac{x^2}{x^2+1} dx &= \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = x - \arctan(x) \\
\int \frac{1}{(x^2+1)(x-1)} dx &= \int \left(\frac{1/2}{x-2} + \frac{-1/2-x/2}{x^2+1} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \arctan(x)
\end{aligned}$$

Zur Partialbruchzerlegung im letzteren Fall: Zähler zu $x-2$ sofort durch Einsetzen von 1 in $\frac{1}{x^2+1}$, dann Gleichungen für $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{Ax+B}{x^2+1}$ mit $x=0$, $x=-1$:

$$\begin{aligned}
-1 &= -\frac{1}{2} + B, \text{ also } B = -\frac{1}{2}, \\
-\frac{1}{4} &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{A}{2}, \text{ also } A = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int x e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}, \\
\int x^2 \sqrt{1-x^3} dx &= -\frac{1}{3} \int -3x^2 \sqrt{1-x^3} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (1-x^3)^{3/2} \\
&= -\frac{2}{9} (1-x^3)^{3/2}, \\
\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \frac{2}{3} u^{3/2} - 2\sqrt{u} = \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} - 2\sqrt{x+1}, \\
\text{mit } u &= x+1, \text{ entsprechend } du = dx.
\end{aligned}$$

(e)

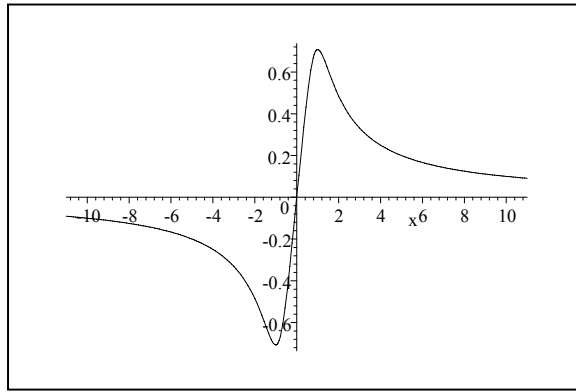
Mit $u = \sqrt{2x-1}$ hat man (nach x auflösen!) $x = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}$, also $dx = u du$, somit

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{2x-1}} dx &= \int \frac{u}{1+u} du = \int \left(1 - \frac{1}{1+u} \right) = u - \ln|1+u| \\
&= \sqrt{2x-1} - \ln(1+\sqrt{2x-1})
\end{aligned}$$

- (5) Zur Funktion $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$: Ungerade, überall definiert, Dominanz des Nenners für große $|x|$. Vorzeichen positiv für $x > 0$, negativ für $x < 0$, einzige Nullstelle $x = 0$. Klar sollte es ein lokales Minimum im Bereich $x < 0$ und entsprechend ein lokales Maximum gegenüber geben, und zwar sollten diese sogar globale Extrema sein. Die erste Ableitung zeigt auch tatsächlich genau zwei Nullstellen, die man in diesem Falle ausrechnen kann:

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1-x^4}{(x^4+1)^{3/2}},$$

also liegen besagte Extrema bei $x = \pm 1$. Der Graph ist nun leicht zu zeichnen; $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$



Wir erwarten demnach (mindestens) drei Wendepunkte, und die zweite Ableitung zeigt, dass es auch nur drei gibt und wo sie liegen (Null war klar):

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} = 2x^3 \frac{x^4 - 5}{(1+x^4)^{\frac{5}{2}}},$$

also die fraglichen Wendepunkte bei $x = \pm \sqrt[4]{5}$.

(6) Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2/2 \\ -\cos(t) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t^2/2 \\ -\cos(t) \end{pmatrix}, \\ \vec{s}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 + t^2/2 \\ -\cos(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 2 + t + t^3/6 \\ 1 - \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Bahn kann man sich z.B. so vorstellen: Zunächst hat man in der zweiten Komponente die Sinusschwingung mit Mittelwert 1 und Amplitude 1, nur läuft man in der ersten Komponente mit dem Term $t^3/6$ immer schneller, so dass die Frequenz immer geringer wird. Hier ist ein Bild vom Anfang und eines, das die globale Entwicklung zeigt:

