Aufgaben zum Wochenende (2)

1. Mit $\vec{a} = (1,2,2)$ und $\vec{b} = (2,1,-1)$ hat man:

$$\begin{aligned}
\left|\vec{a}-\vec{b}\right| &= |-1,1,3| = \sqrt{11}, \text{ also} \\
\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 &= \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = 11, \\
\left|2\vec{a}-2\vec{b}\right| &= 2\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 2\sqrt{11}, \\
\left(2\vec{a}-2\vec{b}\right)^2 &= \left|2\vec{a}-2\vec{b}\right|^2 = 22.
\end{aligned}$$

Der zweite Block:

$$\begin{aligned}
(1,2,2)\times(2,1,-1) &= (-4,5,-3), \\
-3\vec{b}\times 4\vec{b} &= \vec{0}, \\
-3\vec{b}\times\vec{a} &= 3\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = (-12,15,-9), \\
\vec{a}\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right) &= -\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = (4,-5,3).
\end{aligned}$$

2. Es seien $\vec{x}_P = (1,2,2)$, $\vec{x}_Q = (3,1,-1)$, $\vec{x}_R = (2,1,-2)$.

(a) Flächeninhalt des Dreiecks PQR:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|(\vec{x}_Q-\vec{x}_P)\times(\vec{x}_R-\vec{x}_P)\right| &= \frac{1}{2}\left|(2,-1,-3)\times(1,-1,-4)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(1,5,-1)\right| = \frac{3}{2}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Natürlich kann man auch $\vec{x}_R-\vec{x}_Q$ statt $\vec{x}_R-\vec{x}_P$ bequemer finden, und dann kommt natürlich dasselbe heraus:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|(\vec{x}_Q-\vec{x}_P)\times(\vec{x}_R-\vec{x}_Q)\right| &= \frac{1}{2}\left|(2,-1,-3)\times(-1,0,-1)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(1,5,-1)\right|
\end{aligned}$$

(b) Der Winkel in P: $\arccos\left(\frac{15}{\sqrt{14}\sqrt{18}}\right) \approx 0.33$, etwas mehr als 19 Grad. Der Abstand zwischen P und der Geraden durch Q und R ist

$$\begin{aligned}
&\left|\vec{x}_P-\vec{x}_Q-\frac{(\vec{x}_P-\vec{x}_Q)(\vec{x}_R-\vec{x}_Q)}{(\vec{x}_R-\vec{x}_Q)^2}(\vec{x}_R-\vec{x}_Q)\right| \\
=\ &\left|(-2,1,3)-\frac{1}{2}(-1,0,1)\right| = \frac{1}{2}\left|(-3,2,5)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{38}.
\end{aligned}$$

(c) Eine Parametrisierung der fraglichen winkelhalbierenden Geraden ist

$$\begin{aligned}
\vec{x}(\lambda) &= \vec{x}_P + \lambda\left(\frac{\vec{x}_Q-\vec{x}_P}{|\vec{x}_Q-\vec{x}_P|}+\frac{\vec{x}_R-\vec{x}_P}{|\vec{x}_R-\vec{x}_P|}\right) \\
&= (1,2,2)+\lambda\left(\frac{(2,-1,3)}{\sqrt{13}}+\frac{(1,-1,-4)}{\sqrt{18}}\right),\ \lambda\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

oder umparametrisiert ohne Wurzel im Nenner:

$$\vec{y}(\mu) = (1,2,2)+\mu\left(\sqrt{13}+2\sqrt{18}, -\sqrt{13}-\sqrt{18}, -4\sqrt{13}+3\sqrt{18}\right).\ \mu\in\mathbb{R}.$$

Geben Sie eine Parametrisierung der Geraden durch P, welche den Dreieckswinkel in P halbiert. Hinweis: Bilden Sie zwei gleich lange Schenkel in den Richtungen der von P ausgehenden Seiten, dann finden Sie leicht einen geeigneten Richtungsvektor.

3. Die Ebene E sei gegeben durch die Gleichung $x - 2y + z = 1$.

   (a) Man liest sofort die Achsenabschnitte ab zu $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 1$.

   (b) Es ist $(1, -2, 1)$ senkrecht zu E (Normalenvektor).

   (c) Abstand von E zum Ursprung ist $\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{6}$.

   (d) Die Ebene E' parallel zu E, welche den Punkt P, $\vec{x}_P = (1, 2, 3)$, enthält, hat Normalenform $x - 2y + z = 0$. Der Abstand zwischen E und E' ist daher $\frac{1}{6}\sqrt{6}$.

   (e) Die Ebene F, beschrieben durch $-2x + 4y - 2z = 10$, hat gleichwertig Normalenform $x - 2y + z = -5$, also ist der Abstand zwischen E und F gleich $\frac{|1-(-5)|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

   (f) g liegt genau dann auf E, wenn $(1, -2, 1) \cdot \vec{x}_Q = 1$ und $(1, -2, 1) \cdot \vec{a} = 0$.

4. Gemäß 'Länge der Grundseite mal Höhe' haben wir unter Voraussetzung von $\vec{b} \neq \vec{0}$ folgende Berechnung des Flächeninhaltes F:

$$F = \left| \vec{a} - \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{b}^2}\vec{b} \right| \left| \vec{b} \right| .$$

   Also (man beachte: $\vec{x}^2 = |\vec{x}|^2$)

$$F^2 = \left(\vec{a} - \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{b}^2}\vec{b} \right)^2 \left| \vec{b} \right|^2 = \left(\vec{a}^2 - 2\frac{\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}{\vec{b}^2} + \frac{\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}{\left(\vec{b}^2\right)^2}\vec{b}^2 \right) \left| \vec{b} \right|^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2 .$$

   Im verbleibenden Fall $\vec{b} = 0$ hat man $F = 0$ und auch $\vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2 = 0$, wie man sich überzeuge. In beiden Fällen stimmt also die Formel.

5. (a) Die Matrix zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 2z + 3u &= 1 \\ 3x + 2y + 3z - 2u &= 2 \end{aligned}$$

   ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} .$$

   (b) Die Zeilen sind offenbar linear unabhängig, also ist die Lösungsmenge des Systems eine Ebene im $\mathbb{R}^4$.

   (c) Hier ist eine Parametrisierung der Lösungsmenge:

$$\vec{a}\,(x, y) = \frac{1}{5}\,(0, 0, 8, 7) + x\,(5, 0, -13, -12) + y\,(0, 1, 0, 1)\,, \;\; x, y \in \mathbb{R}.$$

   (Natürlich könnten wir auch λ, μ statt x, y schreiben.)

6. Geeignete äußere Parameter sind die Höhe $h > 0$ und der Radius R. Damit findet man leicht die Parametrisierung $\vec{x}\,(r, t, z) = (r\cos t, r\sin t, z)$, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq t < \pi/4$, $0 \leq z \leq h$.

7. Man addiert zum Ortsvektor des Mittelpunktes vom rollenden Kreis zur Zeit t noch den Ortsvektor des sich um diesen Mittelpunkt drehenden Punktes P. Dabei ist es für das genaue Mitführen nur entscheidend, den korrekten Drehsinn (entgegen dem Uhrzeigersinn) und vor allem die korrekte Kreisfrequenz einzuführen. Letztere stellt ein Problem dar. Zunächst überlegt man, dass etwa R/r richtig wäre, aufgrund des Vergleiches der Kreisumfänge. Aber mit dem Beispiel $R = r$ sieht man leicht ein, dass der Punkt zwei Umdrehungen macht, wenn der äußere Kreis einmal abrollt um den festen. Allgemein versteht man: Wenn der äußere Kreis vollständig schleifend herumgeführt wird, so macht der Punkt P bereits eine Umdrehung. Also ist $1 + R/r$ die richtige Kreisfrequenz, und man gelangt zur Beschreibung der Bewegung von P:

$$\vec{x}\,(t) = (R + r)\,(\cos t, \sin t) + r\left(\cos\left(1 + \frac{R}{r}\right)t, \sin\left(1 + \frac{R}{r}\right)t\right), \;\; t \geq 0.$$

Übung (9)

1. $(1, 2, -2) \times (2, 1, 3) = (8, -7, -3)$ ist Normalenvektor zu E, und $(8, -7, -3) \cdot (1, 2, 0) = -6$, also hat man eine Normalenform $8x - 7y - 3z = -6$ für E.

2. Zweckmäßig berechnet man nur $\vec{a} \times \vec{b} = (-1, 2, 2) \times (3, 2, -1) = (-6, 5, -8)$ und $\vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$, das ist $(-2, 3, -1) \cdot (-6, 5, -8) = 35$, nun erschließt man $\frac{1}{2}\vec{a} \times \frac{4}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}(-6, 5, -8)$, $2\vec{b}\,(3\vec{a} \times (-4\vec{c})) = 24\vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 840$.

3. Man kann allgemein in Komponenten ausrechnen
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{pmatrix}$$
und daraus die Matrix ablesen:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$
oder auch $\vec{a} \times \vec{e}_i$, $1 \le i \le 3$, ausrechnen und die Resultate als Spalten der Matrix schreiben. Für $\vec{a} = \vec{0}$ kommt die Nullmatrix heraus, der Kern ist also $\mathbb{R}^3$. (Das Bild ist dann der Nullraum.) Für $\vec{a} \neq \vec{0}$ kann man am bequemsten geometrisch bestimmen, dass der Kern aus den Vielfachen von $\vec{a}$ besteht, also Dimension 1 besitzt, $\vec{a}$ allein ist dann eine Basis. Das Bild ist dann automatisch zweidimensional, und man kann geometrisch sofort sagen, dass es aus den Vektoren besteht, die senkrecht zu $\vec{a}$ sind. Man kann auch das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rcl} -a_3 y + a_2 z & = & 0 \\ a_3 x \qquad - a_1 z & = & 0 \\ -a_2 x + a_1 y \qquad & = & 0 \end{array}$$
lösen. Wenn $a_1 \neq 0$, so hat man $z = \frac{a_3}{a_1}x$ und $y = \frac{a_2}{a_1}x$, mit freiem Parameter x. Das ergibt genau die Vielfachen von $\vec{a}$ als Lösungsmenge. Für $a_1 = 0$ hat man sofort im Falle $a_3 \neq 0$, dass $x = 0$ und $y = \frac{a_2}{a_3}z$, mit frei wählbarem z. Wenn dagegen $a_1 = 0$ und $a_3 = 0$, so muss mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ wenigstens $a_2 \neq 0$ sein, und dann folgt $x = 0$ und $z = 0$ bei beliebigem y. Stets kommen also die Vielfachen von $\vec{a}$ heraus. (Man hätte auch aufgrund der Symmetrie der Matrix Analoges zum Fall $a_1 \neq 0$ für $a_2 \neq 0$ und für $a_3 \neq 0$ erhalten.)

4. $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ ist in allen drei Eingabeschlitzen linear, weil das Vektorprodukt bilinear ist. Für den ersten Schlitz ist die Sache damit sofort klar, für den zweiten hat man:
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \left(\left(\vec{b}_1 + \vec{b}_2\right) \times \vec{c}\right) &= \vec{a} \times \left(\vec{b}_1 \times \vec{c} + \vec{b}_2 \times \vec{c}\right) = \vec{a} \times \left(\vec{b}_1 \times \vec{c}\right) + \vec{a} \times \left(\vec{b}_2 \times \vec{c}\right), \\ \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b} \times \vec{c}\right) &= \vec{a} \times \lambda\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \lambda\left(\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right). \end{aligned}$$
Für den dritten Eingabeschlitz könnte man analog argumentieren, aber auch die Antisymmetrie des Vektorproduktes nutzen und auf den zweiten Schlitz verschieben.

5. Man legt sich die Sache zweckmäßig so zurecht, dass man den Vektor $(0, 0, -g)$ zu zerlegen hat in einen Vektor senkrecht zu $(2, 1, 1)$ und einen Vektor parallel zu $(2, 1, 1)$. Diese Aufgabe wurde bereits gelöst, auf folgende Weise:
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} &= \vec{x} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ also} \\ \lambda &= \frac{-g}{6}, \ \vec{x} = \frac{g}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Der Vektor $\vec{x}$ gibt auch die Richtung des Rutschens an.

6. Zwei mal zweite Spalte minus erste, dritte plus erste, dann drei mal dritte minus zweite, mit den benötigten kompensierenden Faktoren:

$$\det A = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -5 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -8 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 8\cdot 12 = 16..$$

Also bildet das System der Zeilen (ebenso wie der Spalten) ein Rechtssystem, mit Spatvolumen 16.

7. Man hat für den Endpunkt des linken Stabes die Koordinatendarstellung $l_1\left(\cos(t+\pi), \sin(t+\pi), 0\right)$, wobei t den fraglichen Winkel bedeutet $0 < t < \pi - \alpha$, ferner entsprechend für den rechten Stabendpunkt: $l_2\left(\cos(t+\pi+\alpha), \sin(t+\pi+\alpha), 0\right)$. Die dritte Koordinate braucht man zwar nicht für die Beschreibung der geometrischen Konfiguration, wohl aber für das Arbeiten mit den Drehmomenten. Man erhält die Gleichgewichtsbedingung

$$l_1\begin{pmatrix} \cos(t+\pi) \\ \sin(t+\pi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{pmatrix} + l_2\begin{pmatrix} \cos(t+\pi+\alpha) \\ \sin(t+\pi+\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} l_1 m_1 g\cos(t) + l_2 m_2 g\cos(t+\alpha) &= 0 \text{ oder} \\ l_1 m_1\cos(t) + l_2 m_2\left(\cos(t)\cos(\alpha) - \sin(t)\sin(\alpha)\right) &= 0, \\ l_1 m_1 + l_2 m_2\cos(\alpha) &= l_2 m_2\sin(\alpha)\tan(t), \\ t &= \arctan\left(\frac{l_1 m_1 + l_2 m_2\cos(\alpha)}{l_2 m_2\sin(\alpha)}\right). \end{aligned}$$

Für $\pi > \alpha > 0$ ist dieser Ausdruck stets definiert, und für $\alpha = 0$ wäre der Winkel klar $\pi/2$, was eben zum undefinierten (unendlich großen) Tangenswert führt, ebenfalls übereinstimmend mit unserer Formel. Für den einfach vorherzusagenden Fall $l_1 = l_2$, $m_1 = m_2$, mit dem klaren Resultat $t = \frac{\pi-\alpha}{2}$, stimmt die Formel auch: $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$.

Übung (10)

1. $\operatorname{Re}(3-4j)=3$, $\operatorname{Im}(3-4j)=-4$ (nicht etwa $-4j$ (!)). $\operatorname{Re}\left(2e^{-jt}\right)=2\cos t$, $\operatorname{Im}\left(2e^{-jt}\right)=-\sin t$.
2. $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$, $z-\overline{z}=2j\operatorname{Im}(z)$. Vektorsumme bzw. Differenz aufmalen und Gleichungen sehen!
3. $|2-3j|=\sqrt{13}$, $\left|\overline{2-3j}\right|=\sqrt{13}$, $e^{-j\pi\cdot 5/3}=e^{j\pi/3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}j$, $2e^{7j\pi/6}=2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}j\right)=-\sqrt{3}-j$. Stets für $t\in\mathbb{R}: \left|e^{jt}\right|=1$, also $\left|e^{-j\pi\cdot 5/3}\right|=1$, $\left|2e^{7j\pi/6}\right|=2$.
4. $\left|\frac{-2-5j}{5-2j}\right|=1$, da Zähler und Nenner denselben Betrag haben. Daher sind alle genannten Beträge 1. Ausgerechnete Zahl: $\frac{-2-5j}{5-2j}=-j$.
5. $(-3-2j)^2=5+12j$, also sofort $(-3+2j)^2=\overline{(-3-2j)^2}=5-12j$.
6. $-1-\sqrt{3}j=2e^{j(\pi/3+\pi)}=2e^{4j\pi/3}$. $-2-3j=\sqrt{13}e^{j(\pi+\arctan(3/2))}$. $\arctan(3/2)$ ist nicht als einfaches Vielfaches von π darstellbar, sondern nur numerisch zu nähern.
7. $\overline{4e^{-j\pi/3}}=4e^{j\pi/3}$. So auch allgemein $\overline{re^{-j\alpha}}=re^{j\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, dazu kann man einmal einsehen, dass die an der reellen Achse gespiegelte Zahl den entsprechenden negativ gesetzten Winkel hat und denselben Betrag, oder auch ausnutzen, dass cos gerade und sin ungerade ist.
8. Eine Zahl $z\neq 0$ mit $z^3=-z$ muss Betrag 1 haben, da $r^3=r$ nur die reelle Lösungen $r=0$, $r=1$ besitzt. Nun hat man für $z\neq 0$ die äquivalente Gleichung $z^2=-1$, also $z=\pm j$.
9. $j^0=1$, $j^1=j$, $j^2=-1$, $j^3=-j$, $j^4=1$, was man auch geometrisch noch einmal sehen sollte. Allgemein für natürliches $k\geq 0$: $j^{4k}=1$, $j^{4k+1}=j$, $j^{4k+2}=-1$, $j^{4k+3}=-j$.
10. $\vec{x}(\omega)=(R,\omega L)=(R,0)+\omega(0,L)$, $\omega\in\mathbb{R}$, also eine Gerade parallel zur $y-$ Achse bzw. in $\mathbb{C}$ zur imaginären Achse.
11. Man stellt sich vor, dass man ausgehend von der komplexen Zahl 1 oder dem Ort $(1,0)$ für $t=0$ mit wachsendem t um den Kreis läuft (entgegen dem Uhrzeigersinn) und dabei den Radius sehr schnell (exponentiell!) anwachsen lässt, entsprechend für $t<0$ mit fallendem t rechts herum einwärts spiralt. Es handelt sich um die sogenannte logarithmische Spirale.

Übung (11)

1. Die Lösung von $\frac{2-jz}{1+jz} = 3-j$ ist $z = \frac{3}{17} + \frac{5}{17}j$, wozu man die Gleichung mit $1+jz$ multipliziert und $2-jz = (3-j)(1+jz) = 3-j+z(1+3j)$ erhält, lineare Gleichung in z (!), also $z = \frac{-1+j}{1+4j} = \frac{(-1+j)(1-4j)}{17} = \frac{3}{17} + \frac{5}{17}j$.

2. Es handelt sich um die Lösungen von $z^4+1=0$, eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, also liegen die Wurzeln symmetrisch zur reellen Achse. Man bestimmt eine Wurzel als $e^{\pi j/4}$, die anderen durch Weiterdrehen um $\pi/2$, also $e^{3j\pi/4}$, $e^{5j\pi/4}$, $e^{7j\pi/4}$, kartesisch: $\varepsilon_1\frac{1}{2}\sqrt{2} + \varepsilon_2\frac{1}{2}\sqrt{2}j$, $\varepsilon_k \in \{-1,1\}$ für $1 \le k \le 2$.
2

3. $\left(3e^{-3j\pi/4}\right)^7 = 3^7 e^{-21j\pi/4} = 3^7 e^{-5j\pi/4} = 3^7 e^{3j\pi/4} = 3^7\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}j\right) = \frac{2187}{2}\sqrt{2}(-1+j)$

4. $z^2 - 2jz + 1 = 0$ ergibt nach Anwenden der Lösungsformel sofort $z = j \pm j\sqrt{2}$. Die Wurzel war sofort zu ziehen. Dagegen erhält man bei der Gleichung

$$z^2 - 2jz + 1 + j = 0$$

mit der Lösungsformel

$$z_{1,2} = j \pm \sqrt{-2-j},$$

und man hat noch die Wurzel in kartesische Endform zu bringen. Ausführung:

$$(x+jy)^2 = a + jb$$

ergibt (x, y, a, b reell): $x^2 - y^2 + 2jxy = a + jb$, also $x^2 - y^2 = a$ und $2xy = b$, zusammen mit $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$:

$$\begin{aligned} 2x^2 &= a + \sqrt{a^2+b^2}, \\ x &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2+b^2}}, \end{aligned}$$

entsprechend

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-a + \sqrt{a^2+b^2}},$$

aber die Vorzeichen sind so zu wählen, dass xy das Vorzeichen von b hat, also gibt es, wie es sein muss, genau zwei Lösungen. Im Beispiel: $a = -2$, $b = -1$, also $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{-2+\sqrt{5}}$, $y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+\sqrt{5}}$. Somit

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= j \pm \sqrt{-2-j} = j \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{-2+\sqrt{5}} - j\sqrt{2+\sqrt{5}}\right), \\ z_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{-4+2\sqrt{5}} + j\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{5}}\right), \\ z_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{-4+\sqrt{5}} + j\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{5}}\right). \end{aligned}$$

5. Es wird ein Ohmscher Widerstand in Reihe mit einem Kondensator geschaltet und dies Ganze parallel zu einer Spule. Die Leitwerte addieren sich, und der Kehrwert dieser Summe ergibt den Gesamtwiderstand. Daher sollte man von vornherein für $\omega \to 0$ den Widerstand Null und für $\omega \to \infty$ den Widerstandswert R erwarten. Man hat

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{R+1/(j\omega C)} + \frac{1}{j\omega L}} &= \frac{j\omega LR + L/C}{j\omega L + R - j/(\omega C)} = \omega L\frac{1 + j\omega RC}{R\omega C + j(\omega^2 CL - 1)} \\ &= \omega L\frac{(1 + j\omega RC)\left(R\omega C + j\left(1 - \omega^2 LC\right)\right)}{R^2\omega^2 C^2 + (\omega^2 CL - 1)^2} \\ &= \omega L\frac{R\omega C + \omega^3 RLC^2 - \omega RC + j\left(R^2\omega^2C^2 + 1 - \omega^2 LC\right)}{R^2\omega^2C^2 + (\omega^2 CL - 1)^2} \end{aligned}$$

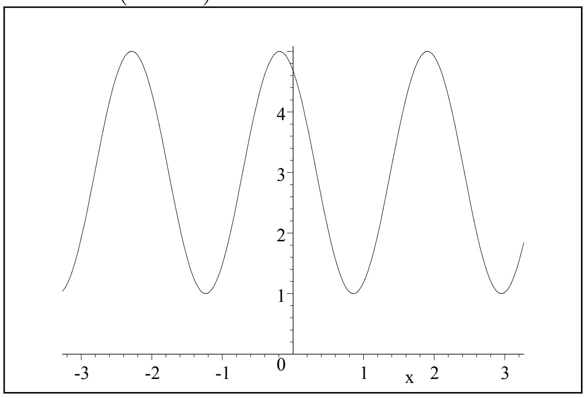
Man denke dabei an folgende Prinzipien: Doppelbrüche vermeiden durch entsprechendes Erweitern, beim Rechnen mit komplexen Zahlen: Reelle Zahlfaktoren so weit wie möglich ausklammern, reelle Quadrate im Nenner nicht unnötig ausmultiplizieren. Schließlich Einheitenkontrolle: Man prüfe, dass im Endresultat außen der Faktor ωL von der Dimension eines Widerstandes ist, der Bruch im Zähler wie im Nenner nur Glieder der Dimension 1 hat (also reine Zahlen). Insbesondere hat $\omega^2 LC$ Dimension 1, eine Zahl, die häufig auftritt. Man beachte, dass das Resultat für $\omega = 0$ definiert ist und den erwarteten Widerstandswert 0 ergibt, ferner für sehr große Werte von ω alles im Zähler (zusammen mit dem Vorfaktor ωL) zu vernachlässigen ist, was nicht ω^4 enthält, ebenso im Nenner, und dann erhält man tatsächlich R.

6. Man hat die Gleichung $\sin x + \cos x = A \sin(x+\varphi) = A\sin(x)\cos(\varphi) + A\cos(x)\sin(\varphi)$, also

$$\begin{aligned} A\cos(\varphi) &= 1 \\ A\sin(\varphi) &= 1 \end{aligned}$$

und damit $A = \sqrt{2}$, $\varphi = \arctan(1) = \frac{1}{4}\pi$, also $f(x) = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$.

7. Die Funktion $f(x) = 3 - 2\sin(3x-1)$ hat ihre Minima dort, wo $\sin(3x-1)$ ihre Maxima hat, also hat man mit den Maxima von sin die Operation zu vollführen: Verschieben um 1 nach rechts, dann Stauchen mit 3, das ergibt $x(k) = \frac{1+\pi/2+2k\pi}{3} = 1/3 + \pi/6 + k\pi \cdot 2/3$, $k \in \mathbb{Z}$. Lösen der Gleichung $3x - 1 = 2k\pi + \pi/2$ führt auf dasselbe Resultat. Weiter überlegt man, dass eine Sinusschwingung anzuheben ist auf den Mittelwert 3, Amplitude ist 2, die Werte liegen also zwischen 1 und 4, ferner ist die Kreisfrequenz 3 und der Phasenwinkel $\pi - 1$, die Sinusschwingung wird also im Fallen von der $y-$ Achse getroffen. So erhält man qualitativ schnell grob das Bild:$3 - 2\sin(3x-1)$



Übung (12)

1. Zu den Symmetrien: Da sin ungerade ist, ist $|\sin x|$ gerade, $f(|x|)$ ist stets gerade, $\sin^2(x)$ ist gerade, da sin ungerade ist und die Quadratfunktion gerade, $\sin\left(x^3\right)$ ist ungerade, da $g \circ f$ mit ungeraden f, g stets ungerade ist, wie man ausdrücklich nachprüfe über $g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x))$. $x^2 \sin(x)$ ist ebenfalls ungerade (gerade Funktion mal ungerade). Man überlege elementar die Graphen ausgehend von den bekannten zu $\sin(x)$, x^2, x^3. Zu $|\sin(x)|$: Umklappen der Teile mit negativem Wert um die $x-$ Achse, es entstehen Knicke. $\sin|x|$: Spiegeln des Graphen von $\sin(x)$ für $x \geq 0$ an der $a-$ Achse. $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$, also eine modifizierte Kosinusfunktion. Von der Sinusfunktion her ist andererseits klar, wo die Maxima und Minima sitzen. $\sin\left(x^3\right)$: Bei Null sieht $\sin(x)$ aus wie $y = x$, daher setzt sich, wie wir später auch mit der ersten Ableitung rechnen können, die Flachstelle von x^3 dort durch. Ansonsten geht das Schwingen zu beiden Seiten wie bei sin, nur immer schneller werdend. $x^2 \sin(x)$: Hüllkurven sind $y = \pm x^2$, zwischen diesen wird oszilliert, die Extrema sind versetzt gegen die Berührungsstellen mit den Hüllkurven, die Nullstellen sind die von sin.

2. Der Graph von f liegt genau dann spiegelsymmetrisch zur Geraden $x = c$, wenn die Funktion $g(x) = f(x+c)$ zur Linksverschiebung des Graphen von f eine gerade Funktion ist, also $f(-x+c) = f(x+c)$ für alle x. Das kann man natürlich auch direkt überlegen: Zu beiden Seiten links und rechts von $x = c$ soll symmetrisch dasselbe herauskommen.

3. Analysieren Sie den Ausdruck $\sin(x^2\sqrt{1-x^2} + \cos^2(2x+1))$ (Baumdiagramm).

4. Zweckmäßig stellt man $q(t) = M - f(t)$ dar und setzt $f(t_0) = M$, also $f(t) = M\left(\frac{1}{2}\right)^{(t-t_0)} = Me^{-(t-t_0)\ln(2)}$, insgesamt daher $q(t) = M\left(1 - e^{(t-t_0)\ln(2)}\right)$.

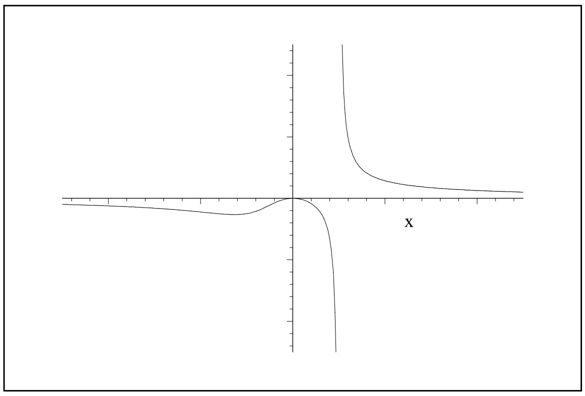
5. Die Gleichung lautet $e^{-t\ln(2)/1000} = \frac{1}{100}$, also $t = 1000\frac{\ln 100}{\ln 2}$, etwa 6644.

6. $5^{4x-1} = 10$ hat die Lösung $x = \frac{1}{4}\frac{\ln(10)}{\ln(5)} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\frac{\ln(50)}{\ln(5)}$, wie man über Logarithmieren (mit ln besser als mit $\log_5$ ausrechnet) bekommt: $(4x-1)\ln(5) = \ln(10)$. $\log_3(x) = 15$ bedeutet $\frac{\ln(x)}{\ln(3)} = 15$ oder besser gleich $x = 3^{15} = 14\,348\,907$.

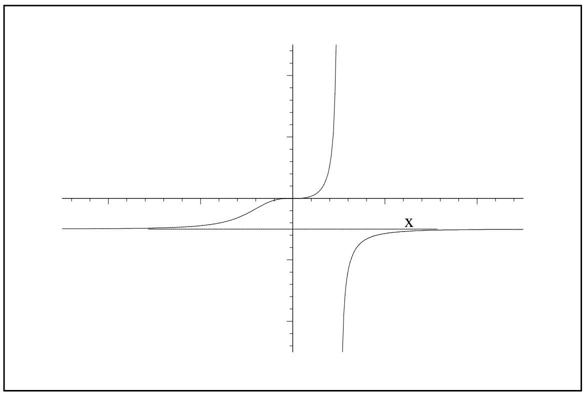
7. (a) $f(x) = -xe^x$ ist überall definiert, hat keine Symmetrie. Das Vorzeichen ist von x bestimmt, also positiv für $x < 0$, negativ für $x > 0$, offenbar ist $x = 0$ einzige Nullstelle. $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$, also muss es im Bereich $x < 0$ ein Maximum und links davon einen Wendepunkt geben. $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$. Nullstelle qualitativ wie die von $-x$.

   (b) $\ln\left(1+x^2\right)$: Überall definiert, gerade Funktion, Werte überall ≥ 0, globales Minimum mit Wert Null bei $x = 0$. Streng monoton steigend im Bereich $x \geq 0$, was man überlege mit dieser Eigenschaft bei der inneren wie der äußeren Funktion. Für große Werte von $|x|$ kann man die 1 vernachlässigen und bekommt asymptotische Näherung an den Graphen von $\ln\left(x^2\right) = 2\ln(x)$. Also wird die Steigung immer flacher. Rund zeichnen bei $x = 0$ (!), keine Ecke oder Spitze.

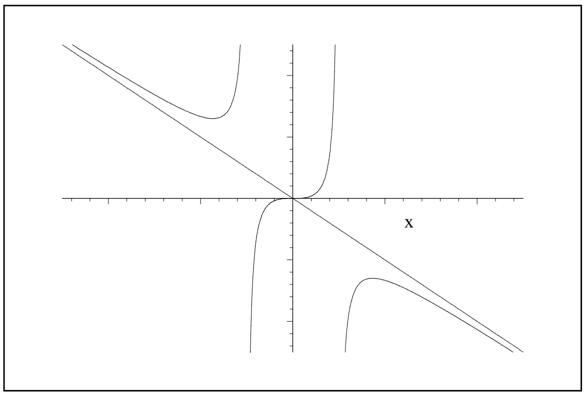
   (c) $h_1(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$: Undefiniert für $x = 1$, dort ist ein Pol. Werte gehen gegen Null für $x \to \pm\infty$, Vorzeichen vom Nenner bestimmt. Die Vorzeichen beim Pol und die Überlegung, dass der Graph bei der einzigen Nullstelle $x = 0$ zu beiden Seiten absinken muss, machen bereits den Graphen klar: Relatives Maximum bei $x = 0$, links davon muss es noch ein relatives Minimum geben, wegen $h_1(x) \to 0$ für $x \to -\infty$. Später werden wir mit der Ableitung ausrechnen können, dass Letzteres bei $x = .\sqrt[3]{2}$ liegt. Qualitativ ist auch klar, dass es links von diesem Minimum einen Wendepunkt geben muss. Getreu dem Prinzip, einen möglichst einfachen Graphen zu zeichnen, der mit den verfügbaren Information verträglich ist, zeichnet man damit grob qualitativ etwa$\frac{x^2}{x^3-1}$



Bei $h_2(x) = \frac{x^3}{1-x^3}$ hat man Analoges zum Definitionsbereich und zum Pol, wieder keine Symmetrie. Anders das asymptotische Verhalten: Die Werte gehen gegen -1 für $x \to \pm\infty$. Vorzeichen: Negativ für $x > 1$, positiv für $0 < x < 1$, negativ für $x < 0$. Nullstelle bei $x = 0$, dort Vorzeichenwechsel, Flachstelle von $y = x^3$ setzt sich durch (Nenner bei $x = 0$ näherungsweise Konstante $y = 1$). Wenn man elementar (also noch ohne Ableitung) überlegt, dass die Funktion überall lokal steigend ist, so erhält man



Später können wir auch mit der Ableitung ausrechnen, dass der Graph lokal überall steigt.
$h_3(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ ist ungerade, hat Pole bei ± 1, einzige Nullstelle bei $x = 0$, und der Zähler dominiert. Asymptote ist $y = -x$ für $x \to \pm\infty$, wie man durch Vernachlässigen der 1 im Nenner oder auch durch Polynomdivision sieht: $h_3(x) = -x + \frac{x}{1-x^2}$. Vorzeichen: Positiv für $0 < x < 1$, negativ für $x > 1$. Damit ist der Graph klar, wenn man das Durchsetzen der Flachstelle bei $x = 0$ berücksichtigt und die notwendigen Extrema sieht: Für $x > 1$ kommt man von $-\infty$ und geht wieder dahin, also muss es ein Maximum geben, da nach Allgemeinwissen die Äste einer gebrochen rationalen Funktion glatt und insbesondere stetig sind.



(a) $h_1(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$, $h_2(x) = \frac{x^3}{1-x^3}$, $h_3(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

8. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\beta\,(x-\alpha))$ leistet das Verlangte. Man transformiert dabei das Bild von arctan, also das Intervall $]-\pi/2, \pi/2[$, linear auf das geforderte Intervall $]0,1[$, indem man den äußeren Summanden und den äußeren Faktor anbringt. Anschließend (Reihenfolge!) das Stauchen mit β, um mit großen Werten von $\beta > 0$ einen entsprechend steilen Anstieg zu erreichen, dann die Verschiebung durch Einsetzen von $x - \alpha$ innen (rote Kurve: Das Beispiel $\beta = 20$, $\alpha = 1$, schwarze Kurve: Bei falscher Reihenfolge $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\beta x - \alpha)$ gerät die Sprungstelle für wachsende Werte von β immer näher an die Null heran und sitzt nicht wie verlangt bei $x = \alpha$.

Aufgaben zum Wochenende (3)

1. (a) Es seien gegeben: $\vec{x}_P = (1,2,-2)\,,\ \vec{x}_Q = (3,2,4)$ und die Ebene E mit $\vec{x}_E(\lambda,\mu) = (2,1,1) + \lambda(2,1,-1) + \mu(3,1,1)\,,\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

   i. Normalenform für E: $2x - 5y - z = -2$.

   ii. Gerade g durch P und Q in parametrisierter Form: $\vec{x}_g(\alpha) = (1,2,-2) + \alpha(2,0,6)\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Schnittpunkt S ist $\vec{x}_S = \vec{x}_g(-2) = (-3,2,-14)\,.$

   iii. Winkel zwischen g und E: $\arcsin\left(\frac{-1}{10\sqrt{3}}\right) \approx 0.058$. Also nur etwas mehr als 3 Grad.

   iv. Wir suchen einen Vektor $\lambda(2,-5,-1)\,,$ so dass $(1,2,-2)+\lambda(2,-5,1)$ Ortsvektor eines Ebenenpunktes ist (der Lotfußpunkt des Lotes von P auf E). Einsetzen in die Normalenform ergibt $-6+30\lambda = -2$, also $\lambda = \frac{2}{15}$. Der gesuchte Spiegelungspunkt hat also in Koordinatendarstellung folgenden Ortsvektor: $\vec{x}_{P'} = \vec{x}_P + 2\lambda(2,-5,-1) = \frac{1}{15}(23,10,-26)\,.$

   v. Es handelt sich um den Schnitt zwischen den beiden mittelsenkrechten Ebenen durch die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$. Diese haben Normalenformen (y tritt in beiden nicht auf, ist also frei wählbar, die Lösungsmengen sind im $\mathbb{R}^3$ zu verstehen, also Ebenen senkrecht zur $xz-$ Ebene!)

$$\begin{aligned} x + 3z &= 5 \\ -x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

   Die Lösungsmenge (z frei, dann x, y durch z ausgedrückt, also $x = -3z+5, y = -5z+8$) ist in parametrisierter Form:

$$\vec{x}(\alpha) = (5,8,0) + \alpha(-3,-5,1)\,,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Geometrisches Verständnis: Man hat auf dem Dreieck PQR den Mittelpunkt des Umkreises, dazu ist noch ein beliebiges Vielfaches eines Normalenvektors zum Dreieck zu addieren.

   vi. Wir brauchen ein kartesisches System auf E. Dazu nehmen wir zweckmäßig einmal den Einheitsvektor $\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)$. Um einen dazu senkrechten parallel zu erhalten, ist es günstig, $(2,-5,-1)\times(2,1,-1) = (6,0,12)$ zu nehmen, anschließende Normierung ergibt $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)\,.$ Nun die gewünschte Parametrisierung: $\vec{x}(t) = (2,1,1) + 4\cos(t)\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1) + 4\sin(t)\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)\,,\ 0 \le t < 2\pi$.

   (b) Spaltenumformung oder auch Berechnung des Spatproduktes oder auch der Determinante zeigt: Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig. am bequemsten: Zieht man von der dritten Spalte das Dreifache der zweiten ab, anschließend von der zweiten Spalte die erste, so erhält man

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 2 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   und kann bereits die (gleich gebliebene Determinante im Kopf ausrechnen (Wert 28), oder auch eine weitere Null schaffen (dritte plus sieben mal zweite Spalte):

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & -28 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

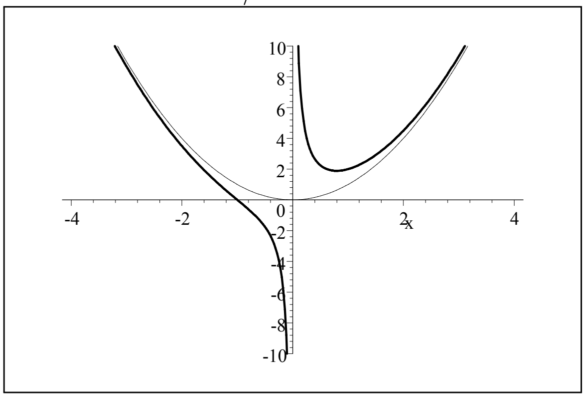
   (Wieder wurde der Wert der Determinante erhalten.) Natürlich genügte die Umformung allein mit dem Resultat, dass kein Nullvektor entstand. Die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$ ist also $\{\vec{0}\}$, und jedes System $A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung. Das auszurechnende Beispiel: insbesondere $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ speziell hat die eindeutige Lösung $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) $-2\sqrt{3} - 2j = -4e^{j\pi/6} = 4e^{7j\pi/6}$, $5e^{-3j\pi/4} = -\frac{5}{2}\sqrt{2} - j\frac{5}{2}\sqrt{2}$

(b) $\frac{1-jz}{2-3z} = 1 - j$ hat die einzige Lösung $z = \frac{11}{25} - \frac{2}{25}j$. Die Gleichung ist eine lineare in z, wobei der Koeffizient von z nicht Null ist. Daraus resultiert die eindeutige Lösbarkeit.

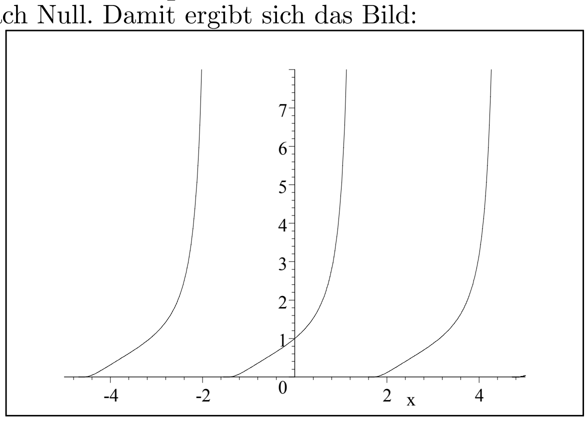
(c) $(a + jb)(a - jb - 1) = a^2 - a + b^2 - jb$, also hat man mit $z = a + jb$, $a, b \in \mathbb{R}$, die gleichwertige Gleichung $a^2 - a + b^2 - jb = a + (b - 1)j$. Koeffizientenvergleich ergibt sofort $b = \frac{1}{2}$, also weiter $a^2 - 2a + \frac{1}{4} = 0$, also $a_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Das ergibt die Lösungsmenge der usrprünglichen Gleichung $\{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}j,\ 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}j\}$.

3. (a) Für x in der Nähe von 0 dominiert $\frac{1}{x}$, für große $|x|$ dominiert x^2. Asymptotische Annäherung an $y = x^2$ (mit eingezeichnet) für große $|x|$. Einzige Nullstelle $x = -1$. Überlagern ergibt sofort die Gestalt des Graphen, wenn man nur den Pol von $1/x$ und die Vorzeichen berücksichtigt:



Für die linear transformierte Funktion g gibt es folgenden Rechenausdruck: $g(x) = 4 + f\,(3(x - 5)) = 4 + f\,(3x - 15)$.

(b) $g(x) = e^{\tan(x)}$ ist genau an den Stellen undefiniert, wo tan dies ist, also an den Stellen $x\,(k) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k ganz. Für jeden Tangens-Ast ergibt sich streng monotones Steigen, da innere und äußere Funktion streng monoton steigen auf jedem diese Intervalle der Form $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k + 1)\,\pi[$, k ganz. Die Exponentialfunktion bildet nun das Intervall $[0, \infty[$ auf das Intervall $[1, \infty[$ ab und das Intervall $]-\infty, 0[$ auf das Intervall $]0, 1[$. Bei Annäherung an $\frac{\pi}{2} + k\pi$ von links gehen die Werte also nach Unendlich, bei Annäherung von rechts nach Null. Damit ergibt sich das Bild:



(c) $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}} = 2x \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\left(x^2 - 1\right)^{-5/4} = -\frac{x}{2(x^2-1)\sqrt[4]{x^2-1}}$

(d) Man hat die Gleichung $2\cos(x) - 3\sin(x) = A\sin(x + \varphi)$ zu lösen (Unbestimmte A, φ) so dass die Gleichung für alle x gilt. Additionstheorem und Koeffizientenvergleich ergeben die Gleichungen $A = \sqrt{13}$,

$$\begin{aligned} A\cos\varphi &= -3 \\ A\sin\varphi &= 2 \end{aligned}$$

$\varphi = \pi + \arctan\left(-\frac{3}{2}\right)$, also $h(x) = \sqrt{13}\sin\left(x + \pi - \arctan(3/2)\right)$. Die lokalen Maxima sind daher an den Stellen $x\,(k) = -\frac{\pi}{2} + \arctan(3/2) + 2k\pi$, k ganz.

(e) Sei $x_1 < x_2$. Dann ist nach der Voraussetzung, dass f streng monoton steigt, $f(x_1) < f(x_2)$, also mit streng monoton fallendem g: $g(f(x_1)) > g(f(x_2))$. Somit ist $g \circ f$ streng monoton fallend. (Das Argument benutzt keine weiteren Eigenschaften von f, g, nicht einmal Stetigkeit.)

4. $f(2+\Delta x) = (2+\Delta x)^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 \Delta x + [6 \cdot 2^2 \Delta x^2 + 4 \cdot 2 \Delta x^3 + \Delta x^4]$, der Restterm (in Klammern) geht offenbar noch nach Division durch Δx gegen Null für $\Delta x \to 0$. Also lautet die Ableitung an der Stelle $x_0 = 2 : f'(2) = 32$. Natürlich kann man das so gleich auch für beliebiges x_0 durchführen. Das ergibt die Näherung 1. Ordnung für 1.99^4 :
$$1.99^4 \approx 16 - 32 \cdot 0.01 = 15.68.$$
Der absolute Fehler ist $1.99^4 - 15.68 = 0.002392$, das macht einen relativen Fehler von $\frac{1.99^4 - 15.68}{1.99^4} = 0.00015253$.

5. Es handelt sich um die Näherung 1. Ordnung von $(1+\varepsilon)^2$, Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ ist 2. (Es wurde nur ε für Δx geschrieben.)

6. $\tan'(0) = 1$ und $\tan(0) = 0$, also $\tan(\Delta x) \approx 0 + \Delta x$ in der Standard-Schreibweise. Wenn also $|x|$ klein ist, so hat man $\tan(x) \approx x$ in Näherung 1. Ordnung.

7. $(1+\varepsilon)^n > M$ genau dann wenn $n \ln(1+\varepsilon) > \ln(M)$, es ist n also als die kleinste natürliche Zahl $> \frac{\ln(M)}{\ln(1+\varepsilon)}$ zu setzen. Für $M = 10^{10}$ und $\varepsilon = 10^{-10}$ benötigt man also $n > \frac{10 \ln(10)}{\ln(1+10^{-10})} = 2.3026 \times 10^{11}$. Übersichtlich wird das, wenn man für den Nenner die Näherung 1. Ordnung wählt, das ergibt sofort $\frac{10 \ln(10)}{\ln(1+10^{-10})} \approx 10^{11} \ln(10) = 2.3026 \times 10^{11}$. Es reicht also $n = 230260000001$ jedenfalls. Aber man sollte nicht daran glauben, dass das so genau ist, da wir schon zur ersten Näherung keinen Unterschied bemerkten. Genauere Rechnung zeigt, dass bereits $n = 230258490260$ ausreicht, das sind immerhin 1509741 weniger. Es war also ganz lächerlich, die 1 noch zu addieren. Und sogar 1.5 Millionen sind nichts gegen 10^{11}. Wir konnten gar nicht erwarten, dass bei Aufzeigen von nur 4 Nachkommastellen der Unterschied zwischen genauer Rechnung und Rechnung mit der Näherung erster Ordnung sichtbar würde (den gibt es erst bei der 18. Nachkommastelle!), noch auch nur, dass $\log(10)$ auch nur in der 4. Nachkommastelle korrekt wäre.

(a) Der erste Ausdruck benötigt nur Grundregeln und die Linearität der Ableitung. Für den zweiten Summanden ist zu beachten: $\sqrt{x^{\sqrt{2}}} = x^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$, Ableitung davon ist $\frac{1}{2}\sqrt{2} x^{\frac{1}{2}\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{2x}\sqrt{x^{\sqrt{2}}}$, nun kommt noch der Faktor 2 dazu und das negative Vorzeichen.
$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left(e^x - 2\sqrt{x^{\sqrt{2}}} + x^{-\pi-1} + \ln(x) - 3\cos(x)\right) \\ = \quad & e^x - \frac{\sqrt{2}}{x}\sqrt{x^{\sqrt{2}}} - (\pi+1)\, x^{-\pi-2} + \frac{1}{x} + 3\sin x) \end{aligned}$$

(b) Einfachste Beispiele zur Kettenregel: Innere Ableitung ist nur eine Konstante:
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin(-5x) &= -5\cos(-x) = -5\cos(5x), \\ \frac{d}{dt}\cos(\omega t + \varphi) &= -\omega \sin(\omega t + \varphi), \\ \frac{d}{dx}(-2x-1)^3 &= -6(2x+1)^2 \end{aligned}$$

(c) Produktregel:
$$\frac{d}{dx}(e^x \tan(x)) = e^x \tan(x) + e^x\left(1 + \tan^2(x)\right) = e^x\left(1 + \tan(x) + \tan^2(x)\right)$$

(d) Nur der ertse Ausdruck erfordert die Anwendung der Quotientenregel, für die anderen genügt (zusätzlich zur Zählerableitung) die Konstantenregel (Beispiele 2 und 4) bzw. das Umschreiben als Grundfunktion hinter einer linearen Funktion (Beispiel 3):
$$\frac{d}{dx}\frac{\sin(2x)}{1-\tan(x)} = \frac{2\cos(2x)(1-\tan(x)) + \sin(2x)\left(1+\tan^2(x)\right)}{(1-\tan(x))^2}$$

Denkt man noch daran, Doppelbrüche (in den Tangenstermen versteckt) zu vermeiden, so kann man das umformen (Erweitern mit $\cos^2(x)$) und vereinfachen zu

$$\frac{2\cos(2x)\cos(x)(\cos(x)-\sin(x))+\sin(2x)}{1-2\sin(x)\cos(x)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2} &= \frac{3}{2}\left(e^{3x}+e^{-3x}\right), \\
\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{(-2x+1)^5}} &= \frac{d}{dx}(-2x+1)^{-5/3} = \frac{10}{3}(1-2x)^{-8/3} = \frac{10}{3(1-2x)\sqrt[3]{(1-2x)^5}} \\
\frac{d}{dx}\frac{x^3}{\sin(2)} &= \frac{3}{\sin(2)}x^2
\end{aligned}$$

(e) $\frac{d}{dx}\left(x-x^3\right)^4 = 4\left(x-x^3\right)^3\left(1-3x^2\right)$

(f)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{x^2}{\sqrt{2x^3-3}} &= \frac{2x\sqrt{2x^3-3}-x^2\frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3-3}}}{2x^3-3} = \frac{2x\left(2x^3-3\right)-3x^4}{\left(2x^3-3\right)\sqrt{2x^3-3}} \\
&= x\frac{x^3-6}{\left(2x^3-3\right)\sqrt{2x^3-3}}
\end{aligned}$$

(g)

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{x^3}{(x-\alpha)^3(x-3)} = 3(x-\alpha)^{-4}\frac{x^3}{x-3} = \frac{3x^3}{(x-\alpha)^4(x-3)}$$

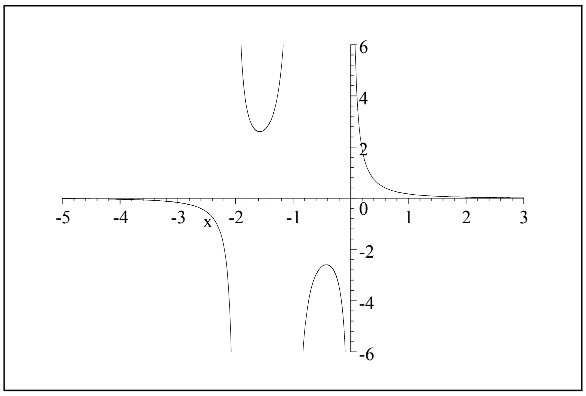
(h) $\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$, $\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln(a)$ ($a>0$ in beiden Fällen)

8. Zu $f(x)=\ln^4(x)$ hat man $f'(x)=\frac{4\ln^3(x)}{x}$, und das geht gegen Null für $x\to\infty$, was sich direkt aus der Dominanz jeder Potenzfunktion über die Logarithmusfunktion ergibt (man setze $x=\left(x^{1/3}\right)^3$ im Nenner). Also geht die Steigung gegen Null, und der Graph wird immer flacher, wie bei ln selbst.

9. $\frac{d}{dx}\sqrt{1+x^3} = \frac{3}{2\sqrt{1+x^3}}x^2$, also $f'(0)=0$, so dass $f(-0.1)\approx 1$. Der relative Fehler ist etwa -0.0005.

10. Man hat $\vec{x}'(t) = e^t(\cos(t)-\sin(t), \sin(t)+\cos(t))$ für alle t. Die $x-$ Achse wird geschnitten für $t=k\pi$, k ganz. Für gerades k ergibt sich der Richtungsvektor $e^{k\pi}(1,1)$, für ungerades k $e^{k\pi}(-1,-1)$. Es handelt sich also stets um den Winkel $\pi/4$.

11. Wenn man um 1 nach rechts verschiebt, so bildet man $g(x)=f(x-1)=\frac{1}{(x-1)x(x+1)}=\frac{1}{x(x^2-1)}$, also eine ungerade Funktion. Der Graph von f liegt daher symmetrisch zu $x=-1$. Es ist der Grph von f leicht zu skizzieren, wenn man das Verhalten für große $|x|$ sowie die Vorzeichen beachtet, ausgehend von den Polen für f bei $x=0,-1,-2$. Die Skizze



macht sofort klar, dass es mindestens zwei Extrema (Min. und Max.) gibt, symmetrisch zu $x = -1$ wegen der angeführten Überlegung zur inneren Symmetrie. Zur genauen Berechnung der Lage der Extrema ist es ein wenig bequemer, die Ableitung von g Null zu setzen. Man hat $g'(x) = \frac{1-3x^2}{(x^3-x)^2}$, und das ist Null genau für $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Also lauten die einzigen Nullstellen von $f'(x) : x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$. Also hat f ein relatives Minimum bei $-\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$ und ein relatives Maximum bei $\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$.

12. Ein Polynom kann keinen Graphen wie verlangt haben, weil es wegen des Ansteigens und der Steigung Null bei $x = 0$ einen Grad höher als 1 haben müsste. Das wäre aber nicht verträglich mit der Asymptoten $y = x$. Zur Konstruktion einer einfachen gebrochen rationalen Funktion mit den verlangten Eigenschaften überlegt man, dass der Zählergrad um 1 höher sein muss als der Nennergrad, außerdem höher als 1, der Nennergrad also mindestens 2 sein muss, weil der Nenner keine reelle Nullstelle haben darf. Also werden wir in den Zähler das einfachste (ungerade) Polynom vom Grad 3 stellen, in den Nenner das einfachste quadratische Polynom ohne reelle Nullstelle. $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$. Das hat sofort die gewünschte Symmetrie und die einzige (flache) Nullstelle bei $x = 0$.