Aufgaben zum Wochenende (1)

1. Man bekommt $y^2 + 2y - 2 = 0$, mit den Lösungen $y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$, mit $y = x^2$ ist nur $y_1 = -1 + \sqrt{3}$ brauchbar, so dass $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1 + \sqrt{3}}$ die einzigen Lösungen der Gleichung sind.

2. Die Gleichung ist für $a = 0$ banal, Lösung $x = 1$. Für $a \neq 0$ ergibt sich die quadratische Gleichung $x^2 + \frac{1}{a}x - \frac{1}{a} = 0$, mit den reellen Lösungen $x_{1,2}(a) = \frac{1}{2a}\left(-1 \pm \sqrt{1+4a}\right)$ für $a > -\frac{1}{4}$, der einzigen reellen Lösung $x = 2$ für $a = -\frac{1}{4}$ und mit keiner reellen Lösung für $a < -\frac{1}{4}$.

3. (a) $\vec{x}_h(\lambda) = (3, 5, -2) + \lambda(6, -1, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) Parametrisierung dieser Geraden: Als Aufpunktvektor ist z.B. $\frac{1}{2}(3, 5, -2) + \frac{1}{2}(-2, 3, -1) = \left(\frac{1}{2}, 4, -\frac{3}{2}\right)$ geeignet, der Richtungsvektor beizubehalten.

   (c) Eine Parametrisierung dieser Menge erhält man mit $\vec{x}(\alpha, \beta) = \alpha(3, 5, -2) + (1 - \alpha)(-2, 3, -1) + \beta(6, -1, 3)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $\beta \in \mathbb{R}$.

4. Die nach geometrischer Interpretation zu erwartenden vier Schnittpunkte erhält man nach Bilden quadratischer Gleichung durch Einsetzen, etwa $\frac{1}{4}\left(1 - y^2\right) + 16y^2 = 1$, Lösungen $y_{1,2} = \pm\frac{1}{21}\sqrt{21}$. Einsetzen in $x^2 + y^2 = 1$ ergibt $x_{1,2} = \pm\frac{2}{21}\sqrt{105}$. Also lauten die Schnittpunkte $\left(\varepsilon_1 \frac{2}{21}\sqrt{105}, \varepsilon_2 \frac{1}{21}\sqrt{21}\right)$, mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$.

5. Der freie Vektor ist $\frac{a}{4}\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\vec{x}_P^K = (0, b) + \frac{a}{4}\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\vec{x}_Q^K = (0, b) + \frac{a}{4}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, Parametrisierung des Kreises: $\vec{x}(t) = \left(0, b + \frac{a}{4}\right) + \frac{a}{4}(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t < 2\pi$.

6. Parametrisierung der Menge aller Gitterpunkte: $\vec{x}(k, m) = k\vec{a} + m\vec{b}$, $k, m \in \mathbb{Z}$. Die verlangten Ursprungsgeraden in parametrisierter Form: $\vec{y}_{k,m}(\lambda) = \lambda\left(k\vec{a} + m\vec{b}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, aber nur für $k \geq 0$, k, ganz, m ganz, k, m teilerfremd. (Sonst wiederholt man sich.) Die unendlich vielen Punkte des Gitters auf der Geraden zu einem solchen Paar (k, m) sind die mit den Ortsvektoren $l\left(k\vec{a} + m\vec{b}\right)$, l ganz.

7. x, y sind frei wählbar, $z = -1 + 3x + 4y$, also ist $\vec{x}(\lambda, \mu) = (0, 0, -1) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(0, 1, 4)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, eine Parameterdarstellung der Ebene.

8. Man hat

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= a(1 - \lambda + 2\mu) + b(2 + 2\lambda + \mu) + c(2 + \lambda - \mu) \\ &= \lambda(-a + 2b + c) + \mu(2a + b - c) + a + 2b + 2c. \end{aligned}$$

   Unabhäbigkeit dieses Ausdrucks von λ und μ bedeutet, dass folgendes Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned} -a + 2b + c &= 0 \\ 2a + b - c &= 0. \end{aligned}$$

   Addieren der Gleichungen ergibt $a + 3b = 0$. b ist zweckmäßig frei wählbar, und mit $b = 1$ (wir suchen nur eine möglichst einfache konkrete Lösung!) erhält man $a = -3$, $c = -5$. Die in der Gleichung auftretende Zahl d ist dann $a + 2b + 2c = -11$. Also beschreibt die Gleichung $-3x + y - 5z = -11$ die betreffende Ebene. Zunächst wissen wir nur, dass alle Punkte mit Ortsvektoren $\vec{x}_E(\lambda, \mu)$ die Gleichung erfüllen, aber nach der vorigen Aufgabe wissen wir auch, dass die Gleichung nicht mehr als eine Ebene beschreibt. Somit beschreibt die angegebene Gleichung genau E.

9. (a) Parameterdarstellung des Graphen der Funktion $f(x) = 1 - x^2$ im Bereich $x \in [-1, 1]$

   (b) Parameterdarstellung einer Geraden, ordentlich geschrieben: $\vec{x}(\lambda) = (3, 1) + \lambda(-1, -4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Einfachere Umparametrisierung: $\vec{y}(\mu) = (3, 1) + \mu(1, 4)$, μ. In altvertrauter Gleichungsform: $y = 4x - 11$.

   (c) Vereinigung der Geraden $y = \pm\sqrt{2}x$.

   (d) Parameterdarstellung der Fläche des Parallelogramms mit den Ecken $\vec{0}$, $\vec{x}(1, 0)$, $\vec{x}(0, 1)$, $\vec{x}(1, 1)$.

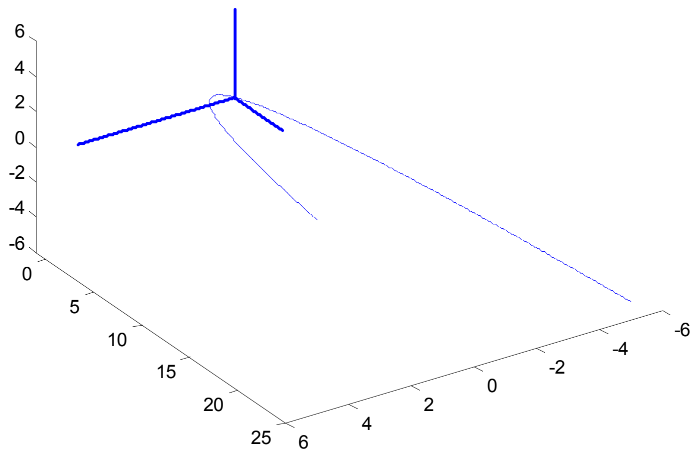

Abbildung 1:

(e) Oberfläche eines zweischaligen Hyperboloids in Gleichungsform.

(f) Graph der Funktion $f(x) = x^3$ in $z-$ Richtung beliebig verschoben, also eine gekrümmte Fläche.

(g) Parametrisierung einer Parabel im Raum, deren Achse die $y-$ Achse ist (Öffnung in deren Positivrichtung), deren senkrechte Projektion auf die $xz-$ Ebene die Gerade $\vec{y}_g(\lambda) = (\lambda, 0, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$, ist, etwas gestaucht gegen die Normalparabel. Skizze (Achsen gezeichnet, übliche Orientierung, $z-$ Achse nach oben):

(h) Parametrisierung einer Ebene im dreidimensionalen Raum, ordentlich geschrieben: $\vec{x}(\lambda, \mu) = (2, -1, 0) + \lambda(0, -2, 3) + \mu(-1, 3, 1)$.

Übung (5)

1. Voraussage und geometrische Deutung: Die Zeilenvektoren des Systems sind linear unabhängig, also haben wir eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter zu erwarten, geometrisch zu deuten als Gerade im $\mathbb{R}^4$. Es ist günstig, zuerst y (oder v - u wäre etwas schlechter) zu eliminieren:

$$\begin{array}{ll} (I) & 3x - 2y + 2u - 2v = 0 \\ (II) & 2x + y - 2u + v = 1 \\ (III) & 2x - y - u + 2v = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} I' = (I + 2 * II) & 7x - 2u = 2 \\ II' = (II + III) & 4x - 3u + 3v = 1 \end{array}$$

Damit ist die Eliminationsphase schon erledigt, da die erste Zeile auch bereits v nicht mehr erhält. Wir sind schon bei einer Zeile mit zwei Unbestimmten angekommen: $7x - 2u = 2$. Zweckmäßig wird man x als freien Parameter ansetzen und nun in der Einsetzungsphase die andern Unbestimmten als lineare Ausdrücke in x ausrechnen:

$$\begin{array}{lll} u & = & \frac{7}{2}x - 1 \text{ aus } (I'), \\ v & = & \frac{13}{6}x - \frac{2}{3} \text{ aus } II', \\ y & = & \frac{17}{6}x - \frac{1}{3} \text{ aus } II. \end{array}$$

Letzter Schritt: Daraus ist eine Parameterdarstellung für die Lösungsmenge zu bilden, Brücke zum Verständnis: Das allgemeine Element der Lösung hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} x \\ \frac{17}{6}x - \frac{1}{3} \\ \frac{7}{2}x - 1 \\ \frac{13}{6}x - \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

also braucht man nur zu trennen, um eine Parameterdarstellung mit freiem Parameter x zu erhalten:

$$\vec{y}(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{17}{6} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Ein wenig schöner, mit λ als Parameter und vereinfachtem Richtungsvektor (Umparametrisierung):

$$\vec{a}(\lambda) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 21 \\ 13 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Man übersieht hier schnell, dass es eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter gibt, geometrisch eine Schnittgerade, wie normalerweise zu erwarten. Übersichtlicher wird die Sache durch Beseitigen der Brüche:

$$\begin{array}{r} -3x - 4y + 6z = 6 \\ 10x - 15y + 6z = 0 \end{array}.$$

Eliminieren von z:

$$13x - 11y = -6,$$

nun x frei:

$$\begin{array}{lll} y & = & \frac{13}{11}x + \frac{6}{11}, \\ z & = & \frac{85}{66}x + \frac{15}{11}. \end{array}$$

das ergibt folgende Parameterdarstellung für die Schnittgerade:

$$\vec{x}(\lambda) = \frac{1}{11}(0,6,15) + \lambda(66,78,85), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Das Gleichungssystem sorgfältig aufgeschrieben (nach Gleichsetzen beider Parameterausdrücke):

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 2\lambda - \mu &= 1 \\ 2\alpha + \beta - 3\lambda - \mu &= 2 \\ \alpha \ - \beta \ - \lambda + \mu &= 2 \end{aligned}$$

Man wird μ eliminieren:

$$\begin{aligned} (II - I) \ \alpha - \beta - 5\lambda &= 1 \\ (I + III) \ 2\alpha + \beta + \lambda &= 3. \end{aligned}$$

Wir brauchen eine lineare Beziehung zwischen α und β, so dass wir gern noch λ eliminieren:

$$\begin{aligned} 11\alpha + 4\beta &= 16, \\ \beta &= -\frac{11}{4}\alpha + 4. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Parameterdarstellung für F, unter Bezeichnung der Schnittgeraden mit g_S :

$$\begin{aligned} \vec{x}_{g_S}(\alpha) &= \alpha(1,2,1) + \left(-\frac{11}{4}\alpha + 4\right)(2,1,-1) \\ &= (8,4,-4) + \alpha \cdot \frac{1}{4}(-18,-3,15), \ \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Man kann noch umparametrisieren und den einfacheren Richtungsvektor ohne den Faktor $\frac{1}{5}$ wählen.) Die zweite Frage: Wenn man eine Ebene in Parameterform und die andere in Gleichungsform hat, so hat man nur nach Einsetzen das folgende System mit einer Gleichung und zwei Unbestimmten zu lösen - wir setzen $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$:

$$a(1 + \lambda a_1 + \mu b_1) + b(2 + \lambda a_2 + \mu b_2) + c(2 + \lambda a_3 + \mu b_3) = d.$$

Wenn dabei λ, μ beide herausfallen, so sind die Ebenen parallel und fallen entweder zusammen oder die Schnittmenge ist leer. Sonst gibt es stets eine Schnittgerade, es ist einer der Parameter als (eventuell konstanter) linearer Ausdruck im andern darzustellen, und der Rest geht wie oben (Einsetzen in die Parameterdarstellung von E_2). Nur ist das Gleichungssystem viel einfacher.

4. 1.) $\vec{x}_P + \lambda\vec{a} = \vec{x}_Q + \mu\vec{b}$, Lösung: $\lambda\vec{a} - \mu\vec{b} = \vec{x}_Q - \vec{x}_P$, das ergibt für linear unabhängige $\vec{a}, \vec{b}$ eine eindeutige Lösung. Im andern Fall gibt es jedenfalls eine Zahl $\alpha \neq 0$ mit $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, dann hat man also die Bedingung $\lambda\alpha\vec{b} - \mu\vec{b} = (\lambda\alpha - \mu)\vec{b} = \vec{x}_Q - \vec{x}_P$. Wenn $\vec{x}_Q - \vec{x}_P \neq \vec{0}$, so ist der Schnitt entweder leer, oder aber die beiden Geraden müssen zusammenfallen, weil $\vec{x}_Q - \vec{x}_P$ in Richtung beider Geraden liegt. Wenn $\vec{x}_Q - \vec{x}_P = \vec{0}$, so fallen die Geraden bei parallelen $\vec{a}, \vec{b}$ jedenfalls zusammen. 2.) $\vec{x}_P + t\vec{a} = \vec{x}_Q + t\vec{b}$ $(t > 0)$ lautet das zweite Problem. Es wird also ein Schnittpunkt verlangt, bei dem die Parameterwerte übereinstimmen und zudem positiven Wert haben. Lösung allgemein: $t\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{x}_Q - \vec{x}_P$. Sind $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig, so muss $\vec{x}_Q - \vec{x}_P$ verschieden von $\vec{0}$ und parallel zu $\vec{a} - \vec{b}$ sein und zudem in dieselbe Richtung zeigen, damit die Aufgabe eine (dann eindeutige) Lösung hat. Sind dagegen $\vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig, sagen wir wieder $\vec{a} = \alpha\vec{b}$ mit $\alpha \neq 0$, so haben wir die Bedingung $t(\alpha - 1)\vec{b} = \vec{x}_Q - \vec{x}_P$, also im Falle $\vec{x}_Q - \vec{x}_P \neq \vec{0}$ eine (dann eindeutige) Lösung genau in dem Falle, dass $(\alpha - 1)\vec{b} \neq \vec{0}$ und in dieselbe Richtung wie $\vec{x}_Q - \vec{x}_P$ zeigt. Wenn dagegen $\vec{x}_Q - \vec{x}_P = \vec{0}$, so gibt es bei $\alpha \neq 1$, also $\vec{a} \neq \vec{b}$, keine Lösung $t > 0$, jedoch bei $\alpha = 1$ ist dann jede Zahl $t > 0$ Lösung, d.h. die Teilchen sind immer am selben Ort.

5. Die Gerade enthält nicht P, also ist E eindeutig bestimmt, und man hat $\vec{x}_E(\lambda, \mu) = (3,2,1) + \alpha(-2,0,1) + \lambda(2,-1,1), \ \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$. (Der fehlende Richungsvektor einfach als $(1,2,2) - (3,2,1)$ genommen.)

6. Beide Bewegungen spielen sich auf der Geraden $\vec{u}_g(\lambda) = \vec{x}_P + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ab, die erste allerdings durchläuft nur die Halbgerade zu den Parameterwerten $\lambda \geq 0$, vom Unendlichen schnell ankommend und sich dann langsam P nähernd, dann zuerst ganz langsam und immer schneller werdend wieder entfernend. Bei der zweiten Bewegung wird allerdings die gesamte Gerade durchlaufen, jeder Punkt nur einmal besucht, auch wieder vom Unendlichen sehr schnell ankommend, bei P langsam werdend und sich dann wieder stark beschleunigt entfernend.

7. Die Aufgabe vektoriell aufgeschrieben: $(0, -2) + tw(\sin\alpha, \cos\alpha) = tv(1, 0)$ mit dem 'Vorhaltwinkel' α ergibt $v = w\sin\alpha$, also $w > v$ wegen $0 < \alpha < \pi/2$. Damit rechnet man den eindeutigen Wert $t = \frac{2}{w\cos\alpha}$ (2. Komponente betrachten!) für den Zeitpunkt des Treffens aus. Ferner ergibt sich $\alpha = \arcsin\left(\frac{v.}{w}\right)$. Einfachere Lösung: Aus geeigneter Skizze entnimmt man (Dreiecksbetrachtung!) sofort mit dem Vorhaltwinkel α und dem Zeitpunkt t des Treffens: $\tan(\alpha) = \frac{vt}{2}$ und $\frac{v}{w} = \sin(\alpha)$, was dieselbe Lösung ergibt.

Übung (6)

1. Parametrisierung der Bahn des oberen Stabendes: $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, $0 \le t < 2\pi$. Schnitt der Geraden durch Lichtquelle und den Punkt zum Ortsvektor $\vec{x}(t)$ mit der $xy-$ Ebene: $(0,2,3)+\lambda(\cos t, -2+\sin t, -3+1) = (x,y,0)$. (Unbestimmte ist λ!) Also $\lambda = 3/2$ und die Parametrisierung der Bahn des Schattens: $\vec{y}(t) = \left(\frac{3}{2}\cos t, -1+\frac{3}{2}\sin t\right)$, $0 \le t < 2\pi$. Also ergibt das den Kreis auf der $xy-$ Ebene mit Radius $3/2$ und dem Mittelpunkt $(0,-1)$.

2. Man bildet den Schnitt der Ebene E mit der Geraden durch P und Q, wobei man diese mit $\vec{x}_g(\alpha) = \vec{x}_P + \alpha(\vec{x}_Q - \vec{x}_P)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, parametrisiert. Wenn dieser Schnitt genau einen Punkt S enthält, so ist Q von P aus nicht zu sehen genau dann, wenn $\vec{x}_S = \vec{x}_g(\alpha)$ mit $0 < \alpha < 1$. Für den Schnitt haben wir das System

$$\begin{aligned} \lambda - \mu - \alpha &= 1 \\ 2\lambda + \mu + 3\alpha &= 2 \\ -\lambda - 2\mu + \alpha &= 2 \end{aligned}$$

Elimination von λ:

$$\begin{array}{lrcl} (II - 2*I) & 3\mu + 5\alpha & = & 0 \\ (I + III) & -3\mu & = & 3 \end{array}$$

man bekommt sofort $\alpha = \frac{3}{5}$, die andern interessieren nur für Kontrollzwecke. Also liegen P und Q auf derselben Seite der Ebene und sind nicht durch diese getrennt.

3. Man schaut nur nach, ob der eine Richtungsvektor ein Vielfaches des andern ist.

4. Man hat sofort eine Parametrisierung für $F : \vec{x}_F(\lambda,\mu) = (1,3,2) + \lambda(2,1,1) + \mu(3,-1,2)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Die Ebenen E und F fallen genau dann zusammen, wenn P auf E liegt, das tut es aber nicht, da das entsprechende Gleichungssystem keine Lösung hat:

$$\begin{aligned} 2\lambda + 3\mu &= 0 \\ \lambda - \mu &= 1 \; . \\ \lambda + 2\mu &= 3 \end{aligned}$$

Dies noch einmal sorgfältig: Elimination von λ ergibt:

$$\begin{array}{lrcl} (III - II) & 3\mu & = & 2 \\ (III - 2*I) & \mu & = & 6. \end{array}$$

Elimination von μ führt dann auf

$$0 = 16.$$

(Natürlich kann man hier den Widerspruch schon vorher sehen, aber wie versprochen kann man ihn stets bei einem unlösbaren linearen Gleichungssystem auf die Form bringen: '$0 = c$', mit $c \ne 0$.) E und F schneiden einander also nicht. H liegt parallel zu E, da sich die Richtungsvektoren von H als Linearkombinationen derer von E schreiben lassen: Man setzt an:

$$\begin{aligned} (-1,2,-1) &= \lambda(2,1,1) + \mu(3,-1,2), \\ (1,3,0) &= \alpha(2,1,1) + \beta(3,-1,2) \end{aligned}$$

und findet durch Raten oder durch Rechnung: $\lambda = 1, \mu = -1$, $\alpha = 2, \beta = -1$.

5. Nennen wir den Schwerpunkt S. Man hat $\vec{x}_S = \frac{1}{6}\vec{x}_P + \frac{1}{3}\vec{x}_Q + \frac{1}{2}\vec{x}_R = \frac{1}{6}(5,-4,5)$.

6. $\vec{x}(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha\vec{x}_A + \beta\vec{x}_B + \gamma\vec{x}_C$, mit $\alpha+\beta+\gamma = 1$, $\alpha,\beta,\gamma \ge 0$, wie man mit der Mittelwertidee des gewichteten Mittels einsehen kann, konstruktiv aber auch noch einmal so mit Skizze einsehen sollte: Mit Strahlensatz hat man eine Parametrisierung mit $\vec{y}(\lambda,\mu) = \vec{x}_A + \lambda(\vec{x}_B - \vec{x}_A) + \mu(\vec{x}_C - \vec{x}_A)$, $0 \le \mu \le \lambda \le 1$. Der Koeffizient bei $\vec{x}_A$ ist gerade $1-\lambda-\mu$. Das ist α aus der ersten Form. Aber das geht auch für ein System

von Punkten $P_1, ..., P_n$ ebenso: Man hat zu bilden: $\vec{x}(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_{P_i}, \alpha_1, ..., \alpha_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Zur Begründung der Tatsache, dass die Menge der so erhaltenen Punkte konvex ist, genügt es, zu zeigen dass ein Punkt R auf der Verbindungsstrecke zwischen den Punkten mit Ortsvektoren $\vec{x}(\alpha_1, ..., \alpha_n), \vec{x}(\beta_1, ..., \beta_n)$ mit Parametertupeln, welche die angegebene Bedingung erfüllen, stets wieder so eine Darstellung hat. Man hat

$$\vec{x}_R = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_{P_i} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{x}_{P_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_{P_i} \right) \text{ mit } 0 \leq \lambda \leq 1,$$

also

$$\vec{x}_R = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i (1-\lambda) + \lambda \beta_i \right) \vec{x}_{P_i},$$

und es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i (1-\lambda) + \lambda \beta_i \right) = (1-\lambda) \sum \alpha_i + \lambda \sum \beta_i = 1 - \lambda + \lambda = 1,$$

ferner sind alle $\alpha_i (1-\lambda) + \lambda \beta_i \geq 0$, da alle Bestandteile nicht negativ sind. Es wäre noch zu zeigen, dass man alle diese Ausdrücke benötigt, um die kleinste konvexe Menge zu erhalten, welche die vorgegebenen Punkte enthält. Das geht mit Induktion über die Anzahl der Punkte: Für einen einzigen Punkt ist die Sache banal. Bei $n+1$ Punkten $P_1, ..., P_{n+1}$ muss man nach Induktionsvoraussetzung wenigstens alle entsprechenden Ausdrücke mit $P_1, ..., P_n$ aufnehmen, dazu aber noch alle Verbindungsstrecken zwischen P_{n+1} und einem der Punkte mit Ortsvektoren $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_{Pi}$, also $\vec{x}_{P_{n+1}} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_{Pi} - \vec{x}_{P_{n+1}} \right)$ mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$. Das ergibt die Koeffizienten $\beta_i = \begin{cases} \lambda \alpha_i \text{ für } 1 \leq i \leq n, \\ 1 - \lambda \text{ für } i = n+1 \end{cases}$, und so erhält man einen beliebigen Satz von $n+1$ Koeffizienten, welche die angegebene Bedingung erfüllen.

7. Man bildet die Schattenpunkte P_i', $1 \leq i \leq 8$, aller Würfelecken (Projektionsstrahlen mit Projektionsebene schneiden, wie schon in Beispielen gesehen). Dann bildet man die konvexe Hülle dieser Projektionspunkte wie in der vorigen Aufgabe gesehen, also $\sum_{i=1}^{8} \alpha_i \vec{x}_{P_i}$ mit $\sum_{i=1}^{8} \alpha_i = 1$.

Übung (7)

1. Bei der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, ist der dritte Zeilenvektor: Zwei mal zweiter minus erster.Daher ist speziell $B\vec{x} = \vec{e}_3$ unlösbar. Das Bild von B wird damit von den ersten beiden Spalten erzeugt, also
$$\{B\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^3\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$ hat die einzige Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Damit ist die Definition der linearen Unabhängigkeit der Spaltenvektoren von A erfüllt. Also kann auch $A\vec{x} = A\vec{y}$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$ nicht gelten. Somit sind auch (nach Satz) auch die Zeilenvektoren linear unabhängig, und jedes System $A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung. Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Spalten über das 'Nullen Schaffen':
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$
Dabei wurden im ersten Schritt die Spalten II und III mit der ersten kombiniert, so dass die ersten Komponenten Null wurden, dann die (neue) Spalte III mit der (neuen) Spalte II, so dass die zweite Komponente verschwand.

3. Wir lösen $(1,0) = \alpha\,(2,1) + \beta\,(1,-1)$ und finden $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$. Ebenso $(0,1) = \lambda\,(2,1) + \mu\,(1,-1)$ mit $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = -\frac{2}{3}$. Daher
$$\vec{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
und
$$\vec{f}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(\vec{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$
Die gesuchte Matrix ist also
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Tatsächlich:
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Für $BA =$ Einheitsmatrix muss gelten:
$$\begin{aligned} B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Also entsteht dasselbe Problem wie schon gelöst, nur genügt es hier, darzustellen:
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

also

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun rechnet man auch sofort nach: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Die Matrix lautet (Achtung, im Uhrzeigersinn wird gedreht!):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

5. (a) linear, Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) linear, Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (c) Der Ursprung bleibt bei Drehung um $(1,1)$ mit nichttrivialem Winkel nicht fest, also $\vec{f}\left(\vec{0}\right) \neq \vec{0}$, und so hat man keine lineare Abbildung. Aber man kann die Abbildung leicht mittels der linearen entsprechenden Drehung (nennen wir die zugehörige Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$) um den Ursprung verbinden: Bezeichnen wir die beschriebene Drehung um $(1,1)$ mit $\vec{f}$, so haben wir: $\vec{f}(\vec{x}) = A\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A\vec{x}$, es handelt sich also um eine affine Abbildung, die durch additives Anfügen eines konstanten Vektors an eine lineare zu bilden ist.

Übung (8)

1. $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$, für $\vec{a} \neq \vec{0}$. Ein Vektor der Länge 2 in Richtung des Vektors $(1,-1)$: $\sqrt{2}\,(1,-1)$.

2. $|(1,-2,3)-(2,1,-1)| = |(-1,-3,4)| = \sqrt{26}$.

3. Offenbar steht $(-2,1,0)$ senkrecht auf $(1,2,3)$. Alle zu diesem Vektor senkrechten Vektoren kann man leicht bekommen, indem man die Lösungsmenge der Gleichung $x+2y+3z=0$ ausrechnet. Bequemer jedoch ist es, einzusehen, dass es sich um einen zweidimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ handeln muss, und noch einen von $(-2,1,0)$ linear unabhängigen Vektor zu erraten, der ebenfalls senkrecht auf $(1,2,3)$ steht, z.B. $(0,3,-2)$. Also die Menge der auf $(1,2,3)$ senkrecht stehenden Vektoren in parametrisierter Form: $\vec{x}(\alpha,\beta) = \alpha(-2,1,0)+\beta(0,3,-2)$. (Später lernen wir das Vektorprodukt kennen, mittels dessen wir leicht zu zwei vorgegebenen linear unabhängigen einen dritten Vektor ausrechnen können, der auf beiden senkrecht steht und nicht Nullvektor ist.)

4. Die vorgelegte Gerade g hat $(2,1)$ als Richtungsvektor. Dazu steht $(-1,2)$ senkrecht, also ist die Steigung jeder zu g senkrechten Geraden gleich -2. (Allgemein zu $m \neq 0: -\frac{1}{m}$, wie man ebenso sieht.)

5. Rechnen Sie schnell im Kopf folgende Skalarprodukte aus:

$$\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}^2 = 28,$$

$$\begin{pmatrix}2x\\2y\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3a\\3b\\6\end{pmatrix} = 2\cdot 3\begin{pmatrix}x\\y\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\2\end{pmatrix} = 24+6\,(xa+yb).$$

6. Den Ausdruck $\frac{(\vec{a}\vec{b})^2}{\vec{a}^2\vec{b}^2}$ kann man keineswegs kürzen! Dagegen:

$$\left|\frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}\right| = \frac{\left|\vec{a}\vec{b}\right|}{|\vec{a}|^2}|\vec{a}| = \frac{\left|\vec{a}\vec{b}\right|}{|\vec{a}|} \text{ (nunmehr ist nicht etwa weiter zu kürzen!).}$$

$$\frac{|\vec{a}|^4\,\vec{a}\vec{b}}{\vec{b}^2\vec{a}^2} = \frac{|\vec{a}|^4\,\vec{a}\vec{b}}{\vec{b}^2\,|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2}{\left|\vec{b}^2\right|}\vec{a}\vec{b} \text{ (oder auch wieder } \vec{a}^2, \vec{b}^2 \text{ für } |\vec{a}|^2, \left|\vec{b}\right|^2 \text{ geschrieben.}$$

Vorsicht, setzt man $\vec{a}\vec{b}$ dann in den Zähler, so benötigt man eine Klammer, also $\frac{\vec{a}^2(\vec{a}\vec{b})}{\vec{b}^2}$.

7. (a) $\left(\frac{1}{3}\vec{x}-2\vec{y}\right)^2 = \frac{1}{9}\vec{x}^2-\frac{4}{3}\vec{x}\vec{y}+4\vec{y}^2$.

   (b) Wenn $\vec{a}$ senkrecht auf $\vec{b}$ steht, so gilt $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2+\vec{b}^2$, und es ist der Satz Pythagoras ausgesprochen (mit $\vec{a}+\vec{b}$ als Hypotenuse).

   (c) Man hat mit der Bedingung für alle Zahlen α,β,γ: $\vec{x}\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\right) = \alpha\vec{x}\vec{a}+\beta\vec{x}\vec{b}+\gamma\vec{x}\vec{c} = 0$, also, da $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und somit $\vec{x}$ selbst als eine Linearkombination davon ausdrückbar ist: $\vec{x}^2 = 0$. Es folgt $\vec{x} = \vec{0}$.

8. Den Winkel zwischen zwei Geraden kann man sinnvoll bilden, auch wenn sie windschief zueinander stehen, einfach als Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren. Also im Beispiel $\arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right) = 1.43$ im Bogenmaß bzw. etwas mehr als 82 Grad. Man beachte, dass es zwei Winkel zwischen zwei Geraden gibt, dass man dann aber lieber den kleineren nennt. (Dreht man einen der Richtungsvektoren um, so wechselt man zwischen beiden.)

9. Das ist der Winkel zwischen den Vektoren $(1,2,3)$ und $(0,1,0)$, also $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 1$, etwas weniger als 58 Grad. Es ist wieder dieselbe Bemerkung anzubringen wie beim Winkel zwischen Geraden.

10. Man hat bei senkrechten Diagonalen im Parallelogramm, das von $\vec{a}, \vec{b}$ erzeugt wird: $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$, und das ist genau dann der Fall, wenn $\vec{a}^2=\vec{b}^2$ (oder $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|$).