Übung (2)

1. Normalform ist $x^2 + \frac{a}{3}x + \frac{1}{3} = 0$, Lösungsformel ergibt $x_{1,2}(a) = -\frac{a}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{a^2-12}$. Daraus ergibt sich allgemein, wenn wir mit L_a die Lösungsmenge für $a \in \mathbb{R}$ bezeichnen:

$$L_a = \begin{cases} \left\{-\frac{a}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{a^2-12}, -\frac{a}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{a^2-12}\right\} \text{ für } a < -2\sqrt{3} \text{ oder } a > 2\sqrt{3}, \\ \left\{-\frac{a}{6}\right\} \text{ für } a = \pm 2\sqrt{3}, \\ \varnothing \text{ für } -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

So weit wurde x als Unbestimmte, a als äußerer Parameter aufgefasst. Nun gehen wir über zur Betrachtung derselben Gleichung als einer solchen in zwei Unbestimmten. Die Lösungsmenge ist also eine Menge von Paaren (a, x). Offenbar darf man a frei wählen, jedoch so, dass L_a nicht leer ist. Also

$$\begin{aligned} L &= \left\{\left(2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\} \cup \left\{\left(-2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\} \\ &\cup \left\{\left(a, -\frac{a}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{a^2-12}\right) \middle| \, |a| > 2\sqrt{3}\right\} \cup \left\{\left(a, -\frac{a}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{a^2-12}\right) \middle| \, |a| > 2\sqrt{3}\right\} \end{aligned}$$

oder natürlich auch kürzer geschrieben, aber weniger übersichtlich:

$$L = \left\{\left(a, -\frac{a}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{a^2-12}\right) \middle| \, |a| \geq 2\sqrt{3}\right\} \cup \left\{\left(a, -\frac{a}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{a^2-12}\right) \middle| \, |a| \geq 2\sqrt{3}\right\}.$$

2. $1000 \cdot x = x + 123$, also $x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$. Man sollte noch diskutieren, wie man analog jede Dezimalzahl, welche schließlich periodisch wird, als Bruch darstellen kann. (Additives Abspalten des nichtperiodischen Teils.)

3. Direkt mit Zweipunkteform: $f(x) = \frac{1}{1100}(x + 100)$.

4. Am besten nutzt man die Scheitelpunktsform: $y = A(x-2)^2 + B$ mit Einfügen der Bedingung, also $a = A$ beliebig $\neq 0$, $b = -4a$, $c = B$ beliebig. Die verbliebenen beiden freien Parameter regeln die Breite und die $y-$ Koordinate des Scheitelpunktes.

5.

$$\begin{aligned} &2x - 3y + 1 \text{ ist linear in } x \text{ und in } y, \text{ auch linear in beiden} \\ &2x - 3xy \text{ ist linear in } y, \text{ auch linear in } x, \text{ aber nicht linear in } x, y \\ &\frac{x-2}{x^2+1} + y \text{ ist linear in } y, \text{ gebrochen rational in } x \text{ (auch in beiden)} \\ &x + \sqrt{x+1} - y^{-\frac{2}{3}} \text{ ist algebraisch in } x \text{ und in } y, \text{ auch in beiden} \\ &x\sin(y) \text{ ist linear in } x \text{ und transzendent in } y \end{aligned}$$

6. $a_{2,0}x^2 + a_{0,2}y^2 + a_{1,1}xy + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0} = \sum\limits_{0 \leq k+l \leq 2,\ k,l \geq 0} a_{kl}x^ky^l$. Symmetrie in x, y liegt genau dann vor, wenn $a_{2,0} = a_{0,2}$ und $a_{1,0} = a_{0,1}$, also allgemeine Form $a\left(x^2 + y^2\right) + bxy + c(x+y) + d$.

7. $\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}x^{2k+1} = -x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{720}x^7 - \frac{1}{40\,320}x^9$, Polynom 9. Grades.

8. $\frac{1}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{8} - \frac{x^9}{10} + \frac{x^{12}}{12} - \frac{x^{15}}{14} = \sum\limits_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k x^{3k}}{2k+4}$.

9. $\binom{8}{3} = 56$

   (a) Relativer Fehler: $\frac{0.001}{5} = 0.000\,2$.

   (b) Weil bei Einheitenwechsel derselbe Faktor an beide Summanden im Zähler und im Nenner angebracht wird und sich daher wegkürzt. (Explizit rechnen.)

(c) $r_w - r_m = \frac{w-m}{w} - \frac{w-m}{m} = -\frac{(m-w)^2}{wm}$.

10. Man hat

$$\begin{aligned} 0 &= (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \\ &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} ... \pm \binom{n}{n}, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{0 \leq k \leq n,\ k\ gerade} \binom{n}{k} = \sum_{0 \leq k \leq n,\ k\ ungerade} \binom{n}{k},$$

also ist die Anzahl der geradzahligen Teilmengen einer $n-$ elementigen Menge gleich der Anzahl ihrer ungeradzahligen Teilmengen. Das kann man etwa auch so einsehen: Sei M eine Menge von n Elementen. Für ungerades n zeigt die Abbildung, welche jeder Teilmenge $A \subset M$ mit ungerader Anzahl die Menge $M \setminus A$ zuordnet, das erwähnte Resultat. Für gerade Anzahl von M kann man etwa ein Element $m \in M$ auszeichnen und den ungeradzahligen Teilmengen A von M, welche m enthalten, die Menge $A \setminus \{m\}$ zuordnen, hingegen den anderen ungeradzahligen Teilmengen A mit $m \notin A$ die Menge $A \cup \{m\}$ zuordnen. In beiden Fällen erhält man so eine Bijektion der ungeradzahligen auf die geradzahligen Teilmengen.

Übung (3)

1. Man hat $(1+\varepsilon)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\varepsilon^k = 1 + n\varepsilon +$ weitere positive Glieder, also $(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$. Nun wächst aber $n\varepsilon$ ins Unendliche für $n \to \infty$, also wird auch $(1+\varepsilon)^n$ beliebig groß. Man hat weiter $1 - \varepsilon = \frac{1}{1+\delta}$ mit $\delta = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ (Auflösen der Gleichung nach δ). mit $0 < \varepsilon < 1$ ist $\delta > 0$. Also $(1-\varepsilon)^n = \frac{1}{(1+\delta)^n}$, und das ist beliebig nahe an Null, da nach dem vorigen Resultat $(1+\delta)^n$ beliebig groß wird.

2.
$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) &= \sum_{0\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq m} a_i b_j x^{i+j} \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k, \text{ mit } c_k = \sum_{i+j=k,\ 0\leq i,j} a_i b_j.\end{aligned}$$

   Daher lautet der Koeffizient zu x^3: $c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$.

3. Sei $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit festen Zahlen a, b, c, d, welche die Eigenschaft haben, dass $ad - bc \neq 0$. Sei g eine Funktion derselben Art. Wir schreiben $g(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Nun (Hinarbeiten auf die gesuchte Form mit Erweitern und Zusammenfassen!)
$$g(f(x)) = \frac{\alpha\frac{ax+b}{cx+d} + \beta}{\gamma\frac{ax+b}{cx+d} + \delta} = \frac{\alpha(ax+b) + \beta(cx+d)}{\gamma(ax+b) + \delta(cx+d)} = \frac{(\alpha a + \beta c)x + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)x + \gamma b + \delta d}.$$
   Es bleibt nachzurechnen, dass die Bedingung erfüllt ist, also
$$(\alpha a + \beta c)(\gamma b + \delta d) - (\alpha b + \beta d)(\gamma a + \delta c) \neq 0.$$
   Man rechnet aus:
$$\begin{aligned}(\alpha a + \beta c)(\gamma b + \delta d) - (\alpha b + \beta d)(\gamma a + \delta c) &= \alpha\delta(ad - bc) + \beta\gamma(ad - bc) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(ad - bc),\end{aligned}$$
   und das ist $\neq 0$, weil beide Faktoren es nach Voraussetzung sind.

4. Die Beziehung $|x| + |y| \leq 1$ schaut man für $x, y \geq 0$ an und erhält $y \leq 1 - x$, also das Dreieck (die Fläche!) mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Symmetrisieren ergibt das Quadrat mit den weiteren Ecken $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(0,1)$, $(1,0)$. Für die Beziehung $x^2 + y^2 \leq 1$ sollte man mit Wissen der Kreisgleichung auf die Kreisfläche kommen.

5. Diese Aufgabe ist so gemeint, dass man die Darstellungen der gesuchten Vektoren durch $\vec{a}, \vec{b}$ möglichst direkt sehen sollte: $\vec{x} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{z}$ (noch einmal erinnern an die Äquivalenzklassen), auch sehen: $\vec{y} = \vec{a} - \vec{x} =$ (ausrechnen) $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$.

6. Strahlensatzfigur!

7. Für eine Richtung in der Ebene genügt eine Zahlangabe, etwa ein Winkel (von der positiven $x-$ Achsenrichtung an entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen), für eine Richtung im Raum genügen zwei Zahlangaben (zwei Winkel wie Längen- und Breitengrad). Für die Bestimmung eines Dreiecks in der Ebene mit genauer Lage benötigt man die Lage eines jeden Eckpunktes, also 6 Zahlangaben. Für die bloße Form eines Dreiecks genügen dagegen drei Zahlangaben (etwa drei Seitenlängen oder zwei Seitenlängen und ein Winkel). Für die Beschreibung einer Parabel in der Ebene mit genauer Lage denke man nicht nur an die Parabeln, welche mit Gleichungen $y = ax^2 + bx + c$ beschrieben werden können, sondern auch an demgegenüber gedrehte. Man braucht dann vier Zahlangaben, etwa zwei für den Scheitelpunkt, einen Streckungsfaktor und dazu einen Winkel (um den die Parabel ausgehend von einer verabredeten Anfangslage, z.B. Achse in Richtung der positiven $x-$ Achse, um den Scheitel zu drehen ist). Für die Form einer Parabel genügt dagegen ein Streckungsfaktor allein.

8. Parametrisierung des umfassenden Halbkreises:

$$\vec{x}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), \ 0 \leq t \leq \pi.$$

Für den linken einbeschriebenen Halbkreis:

$$\vec{y}(t) = (-1 + \cos t, \sin t), \ 0 \leq t \leq \pi.$$

Für den Radius r des kleinen Kreises:

$$(1+r)^2 = 1 + (2-r)^2,$$

lineare Gleichung (!), Lösung $r = \frac{2}{3}$. Der Mittelpunkt des kleinen Kreises ist $\left(0, \frac{4}{3}\right)$, also erhält man die Parametrisierung

$$\vec{u}(t) = \left(0, \frac{4}{3}\right) + \frac{2}{3}(\cos t, \sin t), \ 0 \leq t < 2\pi,$$

für den kleinen Kreis. Für die Berührpunkte könnte man jeweils eine Gerade beschreiben und mit den Halbkreisen schneiden, das wäre jedoch sehr umständlich. Vorab sollte man natürlich die Symmetrie sehen. Für den linken Halbkreis einfach mit Strahlensatz: $\frac{1+r}{1} = \frac{1}{x}$, wobei $x - 1$ die gesuchte $x-$ Koordinate des Berührpunktes ist. Somit $x = \frac{3}{5}$ und Berührpunkt links: $\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$, wobei man die $y-$ Koordinate zweckmäßig als $\left(2 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{5}$
berechnet. (Gerade durch den Mittelpunkt des linken Halbkreises und den Mittelpunkt des kleinen Kreises um 1 nach rechts verschoben denken, Steigung mal $\frac{3}{5}$.

Übung (4)

1. Zweckmäßigkeit: Keine Fischgräten, Nutzen von dünneren und dickeren Linien.

2. (a) Eckpunkte $(2,3,-1)+(\varepsilon_1 a,\varepsilon_2 a,\varepsilon_3 a)\,,\ \varepsilon_i\in\{-1,1\},\ 1\le i\le 3$
   (b) Obere Würfelseite: $\vec{x}\,(\lambda,\mu)=(2,3,-1+a)+(\lambda,\mu,0)\,,\ -a\le\lambda,\mu\le a.$
   (c) $\vec{x}\,(\lambda)=(2-a,3-a,-1+a)+\lambda\,(2a,2a,-2a)\,,\ 0\le\lambda\le 1.$
   (d) Achtung, im Aufgabentext fehlte fälschlich die Angabe, ob der Ausgangs-Eckpunkt vorn oder hinten liegt, für den hinteren lautet eine Parameterdarstellung: $\vec{x}\,(\lambda)=(2+a,3+a,-1+a)+\lambda\,(-2a,0,-2a)\,,$ $0\le\lambda\le 1$. (Für den vorderen stünden die $x-$ Koordinaten $2-a$ im Aufpunktvektor, $2a$ im Richtungsvektor.)
   (e) $\vec{x}_{i,j,\varepsilon}\,(\lambda,\mu)=(2,3,-1)+\lambda\vec{e}_i+\mu\vec{e}_j+\varepsilon a\vec{e}_k,\ -a\le\lambda,\mu\le a$, für i,j,k paarweise verschieden und $\varepsilon\in\{-1,1\}$. Man sieht gut die Anzahl von sechs Seitenflächen.

3. $\vec{x}_g\,(\lambda)=(3,-5)+\lambda\,((3,4)-(3,-5))=(3,-5)+\lambda\,(0,9)\,,\ \lambda\in\mathbb{R}$. (Ruhig den Mittelpunkt der Strecke über Parameterdarstellung rechnen, dann aber sehen, dass einfach $\frac{1}{2}\vec{x}_Q+\frac{1}{2}\vec{x}_R$ herauskommt.)

4. Gleichungsform: $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$, Parameterform: $\vec{x}(t)=(2\cos t,4\sin t),\ 0\le t<2\pi$. Verschobene: $\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{y-3}{4}\right)^2=1$, $\vec{y}(t)=(2,3)+\vec{x}(t),\ 0\le t<2\pi$. Bei der Gleichungsform wird die Gleichung für die zurückverschobene Ellipse aufgeschrieben, bei der Parameterform die Verschiebung an der ursprünglichen Ellipse angebracht.

5. Eine einfache Parametrisierung der Parabel ist $\vec{x}\,(\lambda)=\left(\lambda,\lambda,2\lambda^2\right)\,,\ \lambda\in\mathbb{R}$. Dazu überlegt man, dass der Punkt $(\lambda,\lambda,0)$ den Abstand $\sqrt{2}\lambda$ vom Ursprung hat, das Quadrat davon ist als $z-$ Komponente zu setzen. Multiplikation der Ortsvektoren $\vec{x}\,(\lambda)$ mit 10 ergibt wieder eine Parabel, jedoch eine gestauchte: Setzt man $\mu=10\lambda$, so lautet die $z-$ Komponente $20\lambda^2=20\cdot\frac{\mu^2}{100}=\frac{1}{5}\mu^2$. Die zugehörige Umparametrisierung lautet $\vec{y}\,(\mu)=\left(\mu,\mu,\frac{1}{5}\mu^2\right)\,,\ \mu\in\mathbb{R}$. Spiegelung an der $xz-$ Ebene ergibt $\vec{z}\,(\mu)=\left(\mu,-\mu,\frac{1}{5}\mu^2\right)\,,\ \mu\in\mathbb{R}$.

6. Wir parametrisieren allgemein für k (äußerer Parameter hier!) den Sehstrahl vom Auge zum Punkt P_k :

$$\vec{x}_k^K(\lambda)=(-1,0,1)+\lambda\,(k+1,0,-1)\,,\ \ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Schneiden mit der Ebene $x=0$ ergibt $\lambda=\frac{1}{k+1}$, also

$$\vec{x}_{P'_k}^K=\left(0,0,\frac{k}{k+1}\right).$$

Offenbar kommt man dem Punkt $(0,0,1)$ beliebig nahe, das ist der Fluchtpunkt der Geraden, auf der die P_k liegen. Die Verkürzung sieht man so: d_k sei der Abstand zwischen P'_k und P'_{k+1}, es ist

$$d_k=\frac{k+1}{k+2}-\frac{k}{k+1}=\frac{1}{(k+1)\,(k+2)},$$

und das wird offenbar mit wachsendem k stets kleiner und nähert sich beliebig der Null.