Übungen (15)

1. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x^3 - x^5}$, im maximalen reellen Definitionsbereich.

   (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

   (b) Berechnen Sie die erste Ableitung von f, und klären Sie damit und zusammen mit einer groben Skizze die Extremwertfrage. Hinweis zur groben Skizze: Skizzieren Sie zunächst den Graphen von $g(x) = x^3 - x^5$, das ist leicht ('Überlagerung'). Dann denken Sie sich weiter, was passiert, wenn man von den Werten jeweils die Wurzel nimmt (und wo das überhaupt geht, vgl. Frage (a).

   (c) Überlegen Sie, ziehen Sie dafür auch die erste Ableitung zu Rate, wie der Graph von f sich genauer an den Rändern des Definitionsbereichs verhält, korrigieren Sie eventuell Ihre Skizze. Stellen Sie auch ausdrücklich fest, wie der Graph von f sich für $x \to -\infty$ verhält.

2. Geben Sie eine grobe Skizze des Graphen von $f(x) = e^x - x^2 - 1$ (Überlagerung). Gibt es Extrema? Welches Vorzeichen hat die erste Ableitung global? (Hinweis: Sie bekommen leicht heraus - mit der 2. Ableitung, dass es genau einen Wendepunkt gibt und wo er liegt. Betrachten Sie den Wert der 1. Ableitung an dieser Stelle.)

3. Lösen Sie die Gleichung $e^{-\frac{x}{2}} = 5$.

4. Geben Sie in parametrisierter Form alle Maxima der Funktion $f(x) = \sin(3x - 1)$ an.

5. Welche Gleichung erfüllen die Maxima von $g(x) = e^{-x}\sin(x)$? An welchen Stellen also liegen die Maxima (parametrisierte Form!)?

6. Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für $f(x) = e^{-x}\sin(x)$ um die Stelle $x = 0$, also für kleine $|x|$.

7. Geben Sie eine Normalenform für die Ebene E, welche die Bahn der Kurve $\vec{x}(t) = \big(t, t^2, \sin(t)\big)$ am Orte $\vec{x}(\pi/2)$ senkrecht durchschneidet. Auf welcher Koordinatenebene steht E also senkrecht?

8. Wie kann man praktisch den Flächeninhalt eines Dreiecks ausrechnen, wenn man die Ortsvektoren der Eckpunkte hat? Geben Sie zwei Formeln dafür an. (Nutzen Sie einmal ein Vektorprodukt, einmal Skalarprodukt und Betrag. Erinnern Sie sich an 'Flächeninhalt eines Parallelogramms'.)

9. Berechnen Sie $\int e^{-x} dx$ und $\int \frac{x}{(1-2x)(3+4x)} dx$