

Aufgaben zum Wochenende (4)

1. Berechnen Sie folgende Integrale:

- (a) $\int \frac{1}{2-7x} dx$
- (b) $\int \frac{1}{\sqrt{3x-1}} dx$
- (c) $\int x\sqrt{x+1} dx$ (Hinweis: Das geht mit partieller Integration)
- (d) $\int \frac{x^2}{(x-1)(2-x)(3+x)} dx$
- (e) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx$
- (f) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$
- (g) $\int x^2 \sin(x^3) dx$
- (h) $\int \frac{1}{1-e^{2x}} dx$ (Hinweis: Führen Sie die Substitution $u = e^x$ durch.)

2. Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Was können Sie nach Anschauen Ihrer Lösung sofort über die Lösungsmengen aller Systeme $A\vec{x} = \vec{b}$ mit derselben Matrix und beliebigem Vektor \vec{b} sagen?

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Zusatzfrage: Für welche \vec{b} ist das System $B\vec{x} = \vec{b}$ mit dieser Matrix B lösbar?)

3. Seien $\vec{x}_P = (1, 2, -3)$, $\vec{x}_Q = (-2, 1, 4)$, $\vec{x}_R = (2, -3, 1)$, in einem kartesischen Koordinatensystem.

- (a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene E , welche die Punkte P, Q, R enthält.
- (b) Geben Sie eine Normalenform für E .
- (c) Berechnen Sie den Winkel, den E mit der z - Achse bildet.
- (d) Geben Sie den Abstand zwischen E und dem Ursprung an.
- (e) Es sei eine Gerade g parametrisiert durch $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 2, 2) + \lambda(-2, -6, 11)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass g parallel zu E liegt.
- (f) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade h , welche E im Punkte P senkrecht durchstößt.

4. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = e^{-(x/3-2)^2}$. Zeichnen Sie dazu den Graphen zum Ausdruck e^{-x^2} , und gewinnen Sie den Graphen von f über die bekannten geometrischen Operationen, welche den linearen Transformationen entsprechen. Rechnen Sie auch $f'(x)$ aus, und lösen Sie damit die Extremwertfrage.

5. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ in deren maximalem reellen Definitionsbereich.

- (a) Geben Sie diesen Definitionsbereich an.
- (b) Welche Symmetrie besitzt f ?
- (c) Geben Sie die Vorzeichen der Funktionswerte (stückweise) an.
- (d) Wie verhält sich f für $x \rightarrow \pm\infty$?
- (e) Berechnen Sie die erste Ableitung von f . Was für Werte nimmt sie nur an? Was folgt daraus zur Frage nach Extremwerten? Was folgt über die Frage nach Monotonie für f (Vorsicht!)?
- (f) Skizzieren Sie grob den Graphen von f .

6. Geben Sie die Näherung 1. Ordnung von $\frac{\arctan(x)}{1+x^3}$ für x nahe bei 1.