Übungen (14)

1. Berechnen Sie folgende Integrale:

   (a) $\int_0^1 \left(3+\sin(x)+2e^x-\sqrt[3]{x^4}\right) dx$ (sprechen Sie aus, mit welchen Regeln man hier auskommt)

   (b) $\int_0^2 \ln(2)\, dx$

   (c) $\int (2x+3)^{20}\, dx$, $\int \frac{1}{1-\frac{x}{2}} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} dx$ (erkennen Sie die Struktur der Rechenausdrücke, und wenden Sie stets für solche $1/\alpha-$ Regel an)

   (d) $\int \ln(2x-1)\, dx$ (verwenden Sie das fertige Resultat, dass $\int \ln(x)\, dx = x\ln(x)-x+c$)

2. Berechnen Sie folgende Integrale:

   (a) $\int x\sin(x)\, dx$ (partielle Integration)

   (b) $\int \sin(x)\cos(x)\, dx$ - berechnen Sie dies Integral auf drei Weisen: Einmal mit partieller Integration, einmal mit Umformung laut Additionstheoremen (es verbleibt eine Anwendung der $1/\alpha-$ Regel), schließlich mit Umkehrung der Kettenregel. Beurteilen Sie, wie praktisch die drei Wege im Vergleich sind. Untersuchen und kommentieren Sie auch, wie verschieden die Resultate aussehen, und erinnern Sie sich, was das Resultat einer unbestimmten Integration der Sache nach ist. Prüfen Sie, ob im entscheidenden Sinne die Resultate gleich sind.

3. Berechnen Sie folgende Integrale zum Thema: 'Integrationsfreundliche Umformung':

   (a) $\int 2^x dx$

   (b) $\int \ln(\sqrt[3]{x})\, dx$

   (c) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} dx$

   (d) $\int_0^1 \sin^2(x)\, dx$

   (e) $\int \frac{x}{(1-x)(2-3x)} dx$

   (f) $\int \frac{x}{x+1} dx$ (was ist anders als bei (e)?)

4. Berechnen Sie folgende Integrale - Stichwort 'Umkehrung der Kettenregel', versuchen Sie dabei jeweils die Lösung durch Überblick schnell zu bekommen, führen Sie aber auch ruhig formal Substitution aus:

   (a) $\int xe^{x^2} dx$

   (b) $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}} dx$

   (c) $\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx$

   (d) $\int \frac{1-x^2}{-2x+\frac{2}{3}x^3} dx$ (Hinweis: Schauen Sie an, was die Ableitung des Nenners mit dem Zähler zu tun hat - diesen Spezialfall behandelt man besser anders als etwa 3. (e).

5. Sie wissen von einer Funktion $f: f(0)=1$ und $f'(x)=2x$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Berechnen Sie allgemein $f(x)$ für $x\in\mathbb{R}$. Hinweis: Gehen Sie den besseren Weg über ein bestimmtes Integral, nicht den beliebten und ebenfalls korrekten, aber ungünstigeren über unbestimmtes Integral mit nachräglicher Anpassung der Integrationskonstanten.