

## Übungen (13)

1. Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x}$ .
2. Sei  $f(x) = \arctan^2(x) - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie über die erste Ableitung  $f'$ , dass die Funktion  $f(x)$  im Bereich  $x \geq 0$  monoton fallend ist. Verwenden Sie den Satz vom beschränkten Zuwachs für die benötigte Ungleichung.
3. Wenden Sie den Satz vom beschränkten Zuwachs an, um zu zeigen:

$$\arctan(x) \leq x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \text{ für alle } x \geq 0.$$

Hinweis: Sie stoßen über den Satz auf eine Ungleichung, die man direkt einsehen kann.

4. Sie haben eine Ellipse mit Halbachsen  $a > 0$ ,  $b > 0$  parametrisiert durch  $\vec{x}(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ . Für welche Werte von  $t$  steht der Ortsvektor  $\vec{x}(t)$  senkrecht auf der Tangente an die Bahn im Punkt, der diesen Ortsvektor hat?
5. Zu welchen Zeitpunkten trifft die Bahn der Kurve  $\vec{x}(t) = (t, t^2, \frac{1}{3}t^2 - 2t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , auf die  $xy$ -Ebene, und in welchen Winkeln tut sie das? Hinweis: Sie sollten zunächst eine Skizze machen, daran können Sie das Resultat schon anschaulich sehen und haben Kontrolle über Ihr rechnerisches Resultat.
6. Sei  $f(x) = \ln(1 + x^2)$ . Für welche Werte von  $x$  im Bereich  $]0, 1[$  ist die lokale Steigung von  $f$  an der Stelle  $x$  gleich der mittleren Steigung von  $f$  im Bereich  $[0, 1]$ ? Welcher Satz verspricht, dass es *mindestens* eine solche Zahl  $x$  gibt?
7. Schätzen Sie den Wert des folgenden Integrals grob über Rechtecke ab - geben Sie eine untere und eine obere Schranke:  $\int_0^1 \sin^3(1 + x^2) dx$ .
8. Welchen Wert hat  $\int_{-1}^1 \arctan^3(x^5) dx$ ? (Das können Sie allein mit der Deutung 'Flächeninhalt mit Orientierungsvorzeichen' machen - versuchen Sie nicht etwa, eine Stammfunktion für den Integranden zu finden, das kann mit elementaren Ausdrücken nicht gelingen.)
9. Berechnen Sie allgemein für  $n \geq 0$ :  $f(n) = \int_0^1 x^n dx$ . Wie entwickelt sich  $f(n)$  für  $n \rightarrow \infty$ ? Machen Sie sich das mit den Graphen auch anschaulich klar.
10. Welchen Mittelwert hat die Funktion  $g(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$  im Intervall  $[0, 2]$ ?