

Übungen (13)

1. Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x}$.
2. Sei $f(x) = \arctan^2(x) - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie über die erste Ableitung f' , dass die Funktion $f(x)$ im Bereich $x \geq 0$ monoton fallend ist. Verwenden Sie den Satz vom beschränkten Zuwachs für die benötigte Ungleichung.
3. Wenden Sie den Satz vom beschränkten Zuwachs an, um zu zeigen:

$$\arctan(x) \leq x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \text{ für alle } x \geq 0.$$

Hinweis: Sie stoßen über den Satz auf eine Ungleichung, die man direkt einsehen kann.

4. Sie haben eine Ellipse mit Halbachsen $a > 0$, $b > 0$ parametrisiert durch $\vec{x}(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, $0 \leq t < 2\pi$. Für welche Werte von t steht der Ortsvektor $\vec{x}(t)$ senkrecht auf der Tangente an die Bahn im Punkt, der diesen Ortsvektor hat?
5. Zu welchen Zeitpunkten trifft die Bahn der Kurve $\vec{x}(t) = (t, t^2, \frac{1}{3}t^2 - 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, auf die xy -Ebene, und in welchen Winkeln tut sie das? Hinweis: Sie sollten zunächst eine Skizze machen, daran können Sie das Resultat schon anschaulich sehen und haben Kontrolle über Ihr rechnerisches Resultat.
6. Sei $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Für welche Werte von x im Bereich $]0, 1[$ ist die lokale Steigung von f an der Stelle x gleich der mittleren Steigung von f im Bereich $[0, 1]$? Welcher Satz verspricht, dass es *mindestens* eine solche Zahl x gibt?
7. Schätzen Sie den Wert des folgenden Integrals grob über Rechtecke ab - geben Sie eine untere und eine obere Schranke: $\int_0^1 \sin^3(1 + x^2) dx$.
8. Welchen Wert hat $\int_{-1}^1 \arctan^3(x^5) dx$? (Das können Sie allein mit der Deutung 'Flächeninhalt mit Orientierungsvorzeichen' machen - versuchen Sie nicht etwa, eine Stammfunktion für den Integranden zu finden, das kann mit elementaren Ausdrücken nicht gelingen.)
9. Berechnen Sie allgemein für $n \geq 0$: $f(n) = \int_0^1 x^n dx$. Wie entwickelt sich $f(n)$ für $n \rightarrow \infty$? Machen Sie sich das mit den Graphen auch anschaulich klar.
10. Welchen Mittelwert hat die Funktion $g(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$ im Intervall $[0, 2]$?