Übungen (12)

1. Wie lautet die Näherung 1. Ordnung von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in kleiner Umgebung von $x_0 = 1$? Schreiben Sie das Resultat auf zwei Weisen (einmal mit x_0 und Δx, einmal mit x für x nahe bei 1).

2. Führen Sie bei $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ Polynomdivision aus, um die Asymptote zu ermitteln. Diskutieren Sie auch die Funktion. (Finden Sie alle wesentlichen Merkmale, einschließlich quantitativer Bestimmung von Extremstellen.)

3. Betrachten Sie die Funktion $h\left(x\right) = \frac{e^x}{1+e^x}$, auf $\mathbb{R}$.

   (a) Rechnen Sie die 1. Ableitung aus, und begründen Sie mit ihr, dass h streng monoton steigend ist.

   (b) Nun können Sie den Graphen grob zeichnen, da Sie leicht sehen können, wie das aymptotische Verhalten für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$ ist, was sofort ergibt, welche Werte insgesamt angenommen werden, was also Bild(h) ist.

   (c) Rechnen Sie nunmehr auch die zweite Ableitung aus, und finden Sie den einzigen Wendepunkt (mindestens einen muss es laut Skizze geben, und Sie benötigen so keine dritte Ableitung!).

   (d) Rechnen Sie einen Ausdruck für die Umkehrfunktion von h aus (warum muss die existieren?).

   (e) Wie können Sie den Ausdruck von h so modifizieren, dass der Graph an der Wendestelle beliebig steil (oder flach) wird und dass die Wendestelle beliebig einstellbar ist?

4. Es seien $x_1, ..., x_n$ reelle Zahlen, fest vorgegeben, $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\left(\alpha\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \alpha\right)^2$ ihr globales Minimum genau an der Stelle $\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ annimmt, also beim arithmetischen Mittel der vorgegebenen Zahlenwerte.

5. Sei $n \geq 1$ eine fest vorgegebene natürliche Zahl, k eine ganze Zahl mit $0 \leq k \leq n$. Für welche Zahl p, $0 < p < 1$, wird $f(p) = \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$ maximal? (Hinweis: Beachten Sie, was hier Konstanten sind.) Lösen Sie das Problem einmal direkt, einmal darüber, dass Sie von $f\left(p\right)$ übergehen zu $g(p) = \ln\left(f\left(p\right)\right)$. (Wieso hat g an derselben Stelle im Bereich $0 < p < 1$ ihr Maximum wie f?)

6. Wenden Sie die Regel von de L'Hospital an, um $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2(x)}{x}$ zu ermitteln - wie oft muss man das tun?.

7. Existiert $\lim_{x\to 1} \frac{x}{\ln(x)}$? Was ergäbe fälschliche 'Anwendung' der de L'Hospitalschen Regel in diesem Falle?