Übungen (11)

1. Bilden Sie $\frac{d}{dx}e^{-x^2}$, $\frac{d}{dx}\arctan\left(1+x^2\right)$, $\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

2. Es sei $f(x) = 1 + x^4$. Setzen Sie hier einmal nicht die Ableitung von f voraus, sondern zeigen Sie durch Zerlegen des Ausdrucks $f(x_0 + \Delta x)$ und Betrachtung des entstehenden Restterms, dass $f'(x_0)$ für beliebiges x_0 existiert und wie es lauten muss.

3. Geben Sie die Näherung 1. Ordnung von $\ln(1 + \sin(x))$ für kleine $|x|$. Rechnen Sie für den Spezialfall, dass man diese Näherung durchführt für $x = 0.01$, den absoluten und den relativen Fehler mittels eines Taschenrechners aus - geben Sie diese Werte auf vier Nachkommastellen gerundet an.

4. Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für $\sin(x)$ für x nahe bei $\pi/4$.

5. Es sei eine Parabel parametrisiert durch $\vec{x}(t) = (1,2,3) + (1,2,5)\,t + (-2,1,-4)\,t^2$.

   (a) Wie lauten allgemein für t der Geschwindigkeitsvektor $\vec{x}'(t)$ und der Beschleunigungsvektor $\vec{x}''(t)$?

   (b) Finden Sie den Scheitelpunkt der Parabel über die Beziehung $\vec{x}''(t) \cdot \vec{x}(t) = 0$ heraus.

6. Es sei eine Ellipse (als Bahn einer Kurve) parametrisiert durch $\vec{x}(t) = (2\cos(t), 3\sin(t))$, $0 \le t < 2\pi$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Tangente an die Ellipse im Punkt $\vec{x}(\pi/4)$. Hinweis: Nutzen Sie die vektorielle Ableitung.

7. Sie nähern für $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ die Ableitung von f an der Stelle $x_0 = \frac{1}{1000}$ (also $f'(x_0)$) mit dem Differenzenquotienten $\frac{f x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ für $\Delta x = \frac{1}{10000}$. Schauen Sie einmal den Fehler dieser Näherung an. Welche Eigenschaft der Funktion f bewirkt, dass diese Näherung so herzlich schlecht wird? Vergleichen Sie, wie viel besser die entsprechende Näherung für die Ableitung der Quadratfunktion $g(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ wird.

8. Ein Teilchen werde bis zur Zeit $t = 3$ durch eine Kraft auf einer Kreisbahn gehalten, so dass der Ort zur Zeit t für alle $t \le 3$ lautet: $\vec{x}(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Zum Zeitpunkt $t = 3$ setze die Kraft aus, das Teilchen bewege sich völlig kräftefrei weiter. Geben Sie $\vec{x}(t)$ für alle Zeitpunkte $t \ge 3$ an.

9. Es sei f eine auf $\mathbb{R}$ definierte gerade Funktion, f überall differenzierbar. Zeigen Sie, dass f' dann eine ungerade Funktion sein muss.