Aufgaben zum Wochenende (3)

1. Zwei Ebenen werden miteinander geschnitten. Normalenvektoren der beiden Ebenen seien (in kartesischem System) $(2, 1, -3)$ bzw. $(1, 2, 2)$. Nutzen Sie das Vektorprodukt, um sofort einen Richtungsvektor der Schnittgeraden anzugeben.

2. Im E^3 sei ein kartesisches System gegeben. Beschreiben Sie *alle* Ursprungsgeraden im E^3, welche einen Winkel von $\pi/3$ zur $z-$ Achse bilden. Hinweis: Schauen Sie die senkrechten Projektionen dieser Geraden auf die $xy-$ Ebene an, und charakterisieren Sie jede einzelne durch einen weiteren Punkt, dessen Projektion auf die $xy-$ Ebene auf dem Einheitskreis um den Ursprung in der $xy-$ Ebene liegt. Geben Sie dann eine Schar von Parameterdarstellungen für alle genannten Geraden. Unterscheiden Sie sorgfältig zwischen freiem Parameter für die Schar (als äußerem Parameter für die Parameterdarstellungen) und freiem Parameter der einzelnen Parameterdarstellungen).

3. Berechnen Sie folgende Ableitungen - Hinweis: Unterlassen Sie auf jeden Fall das dusselige Ausmultiplizieren von Quadraten im Nenner, wie sie durch Quotientenregel typisch entstehen!

   (a) $\frac{d}{dx}\left(2e^x - 3\cos(x) + \frac{1}{x^{3/2}}\right)$, $\frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\ln(2)}$

   (b) $\frac{d}{dx}(x\sin(x))$, $\frac{d}{dx}\frac{x}{1-x^2}$, $\frac{d}{dt}\frac{x}{(x-t)(x-2)}$ (Achtung, nach t ist abzuleiten!-Rechnen Sie dies letzte Beispiel auf zwei verschiedene Weisen, und schauen Sie, was besser ist.)

   (c) $\frac{d}{dx}(2x-3)^{27}$, $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1}{3}x - 1}$, $\frac{d}{dx}\ln(2x)$, rechnen Sie die letzte Ableitung einmal mit Kettenregel, einmal auch über Umformen des Ausdrucks $\ln(2x)$ derart, dass Sie die Kettenregel nicht mehr benötigen, vergleichen Sie zur Kontrolle die Resultate.

   (d) $\frac{d}{dx}2^x$, $\frac{d}{dx}\log_3(x)$

   (e) $\frac{d}{dx}\frac{1}{2+\sin^2(x)}$

   (f) $\frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (Hier kommt es darauf an, auf ordentliche Endform zu kommen - ein Doppelbruch darf darin nicht mehr auftreten.)

4. (Eine sehr einfache Kurvendiskussion:) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Finden Sie alle wesentlichen Eigenschaften heraus. Geben Sie eine Grobe Skizze des Graohen. Lösen Sie auch quantitativ die Fragen nach Extrema sowie Wendepunkten. Verwenden Sie für Beides aber auch die Resultate der groben Skizze, um überflüssige Arbeit zu vermeiden.

5. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}$ in deren maximalem reellen Definitionsbereich.

   (a) Geben Sie den maximalen reellen Definitionsbereich an.

   (b) Geben Sie eine grobe Skizze. Begründen Sie dabei verbal alle wesentlichen *qualitativen* Eigenschaften der Funktion. (Hinweisende Fragen: Symmetrie? Vorzeichen? Verhalten für große $|x|$? Notwendige Existenz von Extrema und von Wendepunkten?)

   (c) Klären Sie die Frage nach lokalen Extrema quantitativ. Kommen Sie dabei mit grober Skizze und erster Ableitung aus. Welche weitere Besonderheit (Hinweis: Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs?) ist mit der ersten Ableitung einzusehen? (Berücksichtigen Sie diese in Ihrer Skizze.) Wie schlägt sich das Verhalten der Funktion für große $|x|$ im Verhalten der Ableitung nieder?

   (d) Machen Sie sich am Beispiel dieser (eigentlich doch recht einfachen!) Funktion klar, wie ungeschickt es wäre, in der üblichen schematischen Weise die zweite Ableitung für die Extremwertfrage heranzuziehen. (Nur als Zusatzfrage für mutige Leute: Schaffen Sie eine *quantitative* Bestimmung der Wendepunkte?)

6. Diskutieren Sie die Funktion $g(x) = x\ln(x)$ in deren maximalem reellen Definitionsbereich. Ziehen Sie die Ableitung nicht nur für die Extremwertfrage heran, sondern auch für das Steigungsverhalten der Funktion für $x \to 0$ und für $x \to \infty$. Gegen welchen Wert geht $g(x)$ für $x \to 0$? Untersuchen Sie das ruhig einmal empirisch mit dem Taschenrechner, versuchen Sie dann auch ein Argument für das Vermutete zu geben. (Später lernen wir noch eine recht allgemeine Methode, die auch zur Ermittlung dieses Grenzwertes taugt.)

7. Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ in deren maximalem reellen Definitionsbereich. Ziehen Sie auch hier stark die Ableitung heran.

8. Es sei (in kartesischem System) $\vec{x}_Q = (2, 3, -4)$ und die Gerade g parametrisiert durch $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 2, 3) + \lambda(3, -1, 5)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Lösen Sie als Extremwertfrage das Problem, den Punkt auf der Geraden g zu finden, der vom Punkt Q minimalen Abstand hat, berechnen Sie damit also den Abstand zwischen Q und g. Hinweis: Arbeiten Sie mit dem Abstandsquadrat!