Übung (8)

1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Schaffen Sie Nullen. Zur Bestätigung und zur Übung: Rechnen Sie die Determinante auch noch einmal als Spatprodukt aus. Was können Sie aus dem Resultat erschließen über Bild(A) und Kern(A)?

2. Ein System von Massenpunkten (Masse $m_i > 0$ im Punkt P_i, $1 \leq i \leq n$, $n > 0$, kein Punkt P_i sei der Ursprung) sei starr durch masselose Stäbe miteinander verbunden und im Ursprung drehbar fixiert. Es wirke auf eine Masse m nur die Schwerkraft $\vec{K} = (0, 0, -mg)$, mit festem $g > 0$. Zeigen Sie rechnerisch, dass das System genau dann im Gleichgewicht ist, wenn der Schwerpunkt des Systems mit dem Ursprung auf der Geraden durch den Ursprung parallel zu $\vec{K}$ liegt. Hinweis: Rechnen Sie gänzlich koordinatenfrei.

3. Entwickeln Sie eine allgemeine Formel für den Abstand zweier nicht paralleler Geraden im E^3. Setzen Sie deren allgemeine Parameterdarstellungen (in geometrischer Form) an. Finden Sie einen zur Abstandsmessung geeigneten Vektor über das Vektorprodukt der Richtungsvektoren und eine senkrechte Projektion. Wenden Sie das Resultat an auf die speziellen Geraden g und h, welche gegeben sind durch $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 2, 3) + \lambda(2, -3, 4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x}_h(\alpha) = (-2, -3, -1) + \mu(2, 2, 3)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

4. Berechnen Sie zu $\vec{z}_1 = 2 - 3j$ und $z_2 = -4 + 2j$:

   (a) $|z_1|$, $|z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ - rechnen Sie dafür nicht $\frac{z_1}{z_2}$ aus. Können Sie sofort das Resultat von $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ nennen?

   (b) Berechnen Sie $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$. (Bestätigen Sie mit Hilfe des ausgerechneten Quotienten noch Ihr drittes Resultat aus (a).)

   (c) Wie kann man $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ausdrücken durch $z_1 \cdot z_2$ (für beliebige komplexe Zahlen z_1, z_2)?

5. Skizzieren Sie folgende komplexen Zahlen, und bringen Sie sie in exakte kartesische Form: $-2e^{-5j\pi/2}$, $3e^{7j\pi/4}$, $4e^{-8j\pi/3}$.

6. Welche exakte Polarform haben $-3 - 3j$, $1 + \sqrt{3}j$? Dagegen: Womit muss man sich begnügen, wenn man $-2 + 3j$ in exakte Polarform bringen will?

7. Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die Gleichung $\frac{1+3j}{2-zj} = 1 - j$.