Übung (7)

Vorbemerkung: Alle Koordinatendarstellungen verstehen sich bezüglich eines kartesischen Systems.)

1. Es seien $\vec{x}_P = (1, -2, 3)$ und $\vec{a} = (1, 2, -4)$. Geben Sie eine Normalenform für die Ebene E im $\mathbb{R}^3$, welche durch P geht und auf $\vec{a}$ senkrecht steht.

2. Es seien $\vec{x}_P = (1, 2, -2)$, $\vec{x}_Q = (3, 4, -1)$, $\vec{x}_R = (2, 3, -2)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQR. Hinweis: Nutzen Sie das Vektorprodukt. Geben Sie auch eine Normalenform für die Ebene durch P, Q, R.

3. Vereinfachen Sie den Ausdruck $\vec{a} \times \left(3\vec{b} - 5\vec{a} + 4\vec{c}\right) - \vec{c} \times (3\vec{a})$.

4. Es sei $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein linear unabhängiges System von Vektoren. Rechnen Sie im Kopf aus, für welche Zahl α gilt: $3\vec{c}\left(-4\vec{b} \times 5\vec{a}\right) = \alpha\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$. Zusatzfrage: Wie steht es bei einem linear abhängigen System mit der Lösungsmenge der Gleichung in der Unbestimmten α?

5. Es herrsche (ausschließlich) eine überall konstante Schwerebeschleunigung $(0, 0, -g)$, $g > 0$. Mit der richtigen physikalischen Einheit versehen ist das auch die Kraft, die auf die Einheitsmasse wirkt. Es sei E eine ('schiefe') Ebene, welche senkrecht auf dem Vektor $(2, 3, 1)$ steht.

   (a) Zerlegen Sie den Vektor $(0, 0, -g)$ in eine Summe von zwei Vektoren, von denen der eine parallel zu E und der andere senkrecht auf E steht. Hinweis: Nutzen Sie nach Aufstellen einer entsprechenden Gleichung die Technik des skalaren Anmultiplizierens.

   (b) In welcher Richtung rutscht also ein auf E aufgesetzter Gegenstand hinunter?

   (c) Können Sie einen Vektor wie in (b) gefordert auch über die Bildung eines Vektorprodukts erhalten?

6. Es herrsche durch verschiedene Kräfte an einem um den Ursprung drehbaren System ein Gesamtdrehmoment $\vec{D} \neq \vec{0}$ um den Ursprung. Welche Bedingung müssen ein Punkt P und eine Kraft $\vec{K}$ erfüllen, damit das von $\vec{K}$ angesetzt in P ausgeübte Drehmoment $\vec{D}$ genau kompensiert, dass also Gleichgewicht herrscht? Gelingt es stets, P und $\vec{K}$ passend zu wählen? Kann man das auf verschiedene Weisen tun?

7. (a) Berechnen Sie mittels einer senkrechten Projektion den Flächeninhalt F des von zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

   (b) Zeigen Sie nunmehr, dass $F^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2$.

   (c) Folgern Sie daraus die Dreiecksungleichung.