

Aufgaben zum Wochenende (2)

1. Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$\vec{a} (2\vec{b} - \vec{c}) + 3\vec{b} (\vec{c} - 5\vec{a}).$$

2. Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$\left| (\vec{a}\vec{b}) \vec{a} - \frac{\vec{a}\vec{b}}{a^2} \vec{a} \right|.$$

3. Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten P und Q , $\vec{x}_P = (1, 2, -1)$, $\vec{x}_Q = (-3, 1, 2)$. Berechnen Sie auch den Winkel, in dem P und Q vom Ursprung aus gesehen erscheinen, d.h. den Winkel zwischen den Ortsvektoren.
4. In welchem Winkel schneidet die Gerade eine Gerade g mit Richtungsvektor $(1, 2, 3)$ die xy -Ebene? (Beachten und erklären Sie, dass man dafür keinen Aufpunktvektor oder gar Schnittpunkt benötigt.)
5. Berechnen Sie zur Ebene E , welche durch die Gleichung $2x - 3y + z = 1$ bestimmt ist:
- (a) den Abstand zwischen E und dem Ursprung,
 - (b) den Winkel zwischen E und der x -Achse,
 - (c) den Winkel zwischen E und der yz -Ebene,
 - (d) den Abstand zwischen E und dem Punkt P , $\vec{x}_P = (3, 4, -5)$,
 - (e) den Abstand zwischen E und der Ebene F , welche mit $-4x + 6y - 2z = 10$ beschrieben ist.
6. Finden Sie einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$, der senkrecht auf $(1, m)$ steht, $m \neq 0$. Lösen Sie damit die folgende Aufgabe: Eine Gerade g ist gegeben mit $y = mx + b$, $m \neq 0$. Gesucht ist die Steigung einer jeden Geraden, welche auf g senkrecht steht.
7. Lösen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung erneut (und wesentlich bequemer als zuvor!) die Aufgabe, den Abstand zweier Geraden $y = mx + b_0$, $y = mx + b_1$ im \mathbb{R}^2 zu berechnen. (Folgen Sie dem Muster, wie wir den Abstand zweier paralleler Ebenen in Normalenform berechneten.)
8. Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren. Geben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\vec{a}\vec{x} = 0$, $\vec{b}\vec{x} = 0$, $\vec{c}\vec{x} = 0$ an.
9. Vereinfachen Sie den Ausdruck $(\vec{a} + \vec{b}) (\vec{a} - \vec{b})$, und leiten Sie aus dem Resultat ab, dass ein Parallelogramm genau dann eine Raute ist (d.h. alle Seiten gleich lang hat), wenn die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.