Übung (6)

1. Geben Sie die Matrix der Drehung im $\mathbb{R}^3$ an, bei der um die $y-$ Achse mit dem Winkel $\pi/4$ gedreht wird, und zwar im Uhrzeigersinn, wenn man vom Ursprung aus in die Positivrichtung der $y-$ Achse schaut.

2. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 0 \\ -3x + 2y - z &= 0 \\ -x - y + z &= 0 \end{aligned}\ .$$

   (a) Geben Sie die zugehörige Matrix A an.

   (b) Stellen Sie fest, dass die Zeilenvektoren von A linear abhängig sind.

   (c) Welche Dimension muss die Lösungsmenge des oben stehenden Systems daher haben?

   (d) Geben Sie in parametrisierter Form $Kern\,(A)$ an.

   (e) Geben Sie einen Vektor $\vec{b}$ an, so dass $A\vec{x} = \vec{b}$ jedenfalls leere Lösungsmenge hat.

3. Prüfen Sie nach, ob folgende Vektoren ein linear unabhängiges System bilden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

   Was folgt aus dem Resultat über die Eigenschaften der linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}?$$

4. Geben Sie eine Matrix B an, so dass $B\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}\right) = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Hinweis: Es genügt, diese Eigenschaft für $\vec{x} = \vec{e}_1, \vec{e}_2$ zu fordern (warum?). Setzen Sie wie gewohnt B mit unbekannten Einträgen an, und ermitteln Sie die gemäß den sich ergebenden Bedingungen.

5. Wie rechnen Sie zweckmäßig $|(-45, 15, 30)|$ aus?

6. Welchen Betrag hat der Vektor $\frac{1}{|(1,2,-3)|}(1, 2, 3)$? Verallgemeinerung und Nachweis der Verallgemeinerung?

7. Folgern Sie aus der Dreiecksungleichung, dass

$$||\vec{y}| - |\vec{x}|| \leq |\vec{y} - \vec{x}|\,.$$

   Hinweis: Wenden Sie die Dreiecksungleichung an auf $\vec{x} + (\vec{y} - \vec{x})$.