Übung (5)

1. Es sei die Ebene E beschrieben durch die Gleichung $2x - 3y + 2z = -5$. Ferner sei eine Parabel parametrisiert durch $\vec{x}\,(t) = (1, 2, 0) + t\,(1, -2, 1) + t^2\,(-2, 1, -3)\,,\ t \in \mathbb{R}$. Schneiden Sie E mit der Parabel. Fragen Sie sich zuvor, welche Resultate bei einer solchen Schnittbildung im Prinzip möglich sind, und wie sich diese Fälle in der zu gewinnenden Bestimmungsgleichung für t niederschlagen. Zusatzfrage: Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene, in welcher die angegebene Parabel liegt.

2. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z - u &= 0 \\ -3x + 2y + 3z + 2u &= 0 \\ 2x - 2y - z + u &= 1 \end{aligned}\ .$$

   Denken Sie daran, dass die Lösungsmenge in parametrisierter Form darzustellen ist.

3. Lösen Sie allgemein für beliebige Werte des äußeren Parameters a (nur x, y sind Unbestimmte) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (2a+1)x + 2y &= 0 \\ ax + (a-1)y &= 1 \end{aligned}\ .$$

4. Finden Sie die $(2 \times 2)-$ Matrix A, für welche gilt:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Setzen Sie an: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, und finden Sie mit den vorgegebenen Bedingungen ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Einträge von A,das Sie lösen. Denken Sie noch darüber nach, welche Bedingung an die beteiligten Vektoren zu stellen ist, damit eine Aufgabe dieser Form eindeutig lösbar ist.

5. Es sei eine Abbildung $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\vec{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ 3x + 4y - z \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie eine Matrix A an, welche $\vec{f}$ darstellt, so dass also $\vec{f}\,(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

6. Finden Sie die Matrix A, welche die Spiegelung am Ursprung im $\mathbb{R}^3$ beschreibt. Tun Sie dies auf zwei Wegen: Einmal beschreiben Sie die verlangte Spiegelung im Stil der vorigen Aufgabe und lesen daraus die Matrix A ab. Ein zweites Mal stellen Sie fest, was die Spiegelbilder von $\vec{e}_i$, $1 \leq i \leq 3$, sind, und bestimmen damit A.

7. Finden Sie die Matrix B,welche die Spiegelung an der $xz-$ Ebene im $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

8. Es seien A und B $(m \times n)-$ Matrizen. Wie kann man aus A und B eine neue Matrix C berechnen, so dass gilt: $C\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$?