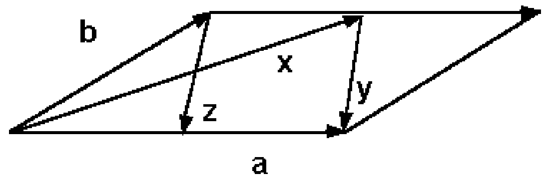
Übung (3)

1. In welche Form sollte man einen Ausdruck der Vektorrechnung wie $(2+\lambda)\,\vec{x}_1 + (3-\lambda)\,\vec{x}_1 + 4\,(\lambda\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + 5\,((1-\lambda)\,\vec{x}_3 - \vec{x}_2)$ sofort bringen? Üben Sie, dies im Kopf zu tun.

2. In der folgenden Skizze sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gegeben und die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ gesucht, also letztere in $\vec{a}, \vec{b}$ auszudrücken durch die geometrischen Vektorraumoperationen. Zu verstehen: Die ganze Figur ist ein Parallelogramm, $\vec{x}$ und $\vec{z}$ (genauer: deren hier gezeichnete Repräsentanten) stoßen auf den jeweiligen Seitenmittelpunkt.



3. Wie ist die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{R}^3$ der Gleichung $2x - 3y + 4z = 1$ geometrisch zu deuten? Geben Sie für L eine Parameterdarstellung in Koordinatenform. Gilt Ihre Deutung auch dann noch, wenn die Koordinaten x, y, z bezüglich eines nicht kartesischen Systems aufzufassen sind?

4. Es sei die Gerade g im E^3 gegeben durch $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 2, -1) + \lambda\,(3, -1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ferner der Punkt P mit $\vec{x}_P = (2, 1, 1)$. Es sei weiter die Ebene E dadurch bestimmt, dass g in E liegt und P auf E liegt.

   (a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für E.

   (b) Formulieren Sie, welche Bedingung allgemein eine Gerade h und ein Punkt Q im E^3 erfüllen müssen, damit durch die Bedingung 'F sei eine Ebene, und es gelte $Q \in F$ und $h \subset F$' eindeutig eine Ebene F bestimmt wird.

5. Sagen Sie für die folgenden Lösungsmengen der folgenden Gleichungen bzw. Gleichungssysteme jeweils die Dimension voraus sowie, ob es sich um ein lineares oder nichtlineares Gebilde handelt. Geben Sie anschließend jeweils eine genauere geometrische Deutung (über ein kartesisches Koordinatensystem) und eine grobe Skizze. (Achten Sie auf die angegebenen Grundmengen, innerhalb deren die Lösungsmengen zu bestimmen sind.)

   (a) Im $\mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 1$; welches Gebilde beschreibt diese Bestimmungsgleichung im $\mathbb{R}^3$?

   (b) Im $\mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 = 1$; welches Gebilde beschreibt diese Bestimmungsgleichung im $\mathbb{R}^2$?

   (c) Im $\mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2$

6. Geben Sie für folgende Parametrisierungen an, was für ein geometrisches Gebilde jeweils parametrisiert wird - deuten Sie die Koordinatendarstellungen wiederum jeweils in einem kartesischen System. Geben Sie jeweils vorab Dimension und 'linear / nicht linear' an.

   (a) $\vec{x}(\lambda) = \left(\lambda, \lambda, \lambda^2\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) $\vec{y}(\lambda, \mu) = \left(\lambda, \lambda^2, \mu\right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Was ändert sich, wenn man beschränkt: $0 \le \lambda, \mu \le 1$?

   (c) $\vec{u}(\lambda, \mu) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $0 \le \lambda, \mu \le 1$. (Erklären Sie, wie jeweils die geometrische Deutung aussieht für alle zu unterscheidenden Fälle bei den vorgegebenen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$.)

7. Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorrechung, dass man stets ein Parallelogramm bekommt, wenn man die Seitenmitten eines Vierecks geeignet miteinander verbindet. (Hinweis: Setzen Sie ein nicht ausgeartetes Viereck voraus, bei dem also keine drei Punkte jeweils auf einer Geraden liegen, und beschreiben Sie das Viereck durch freie Kantenvektoren.)