Aufgaben zum Wochenende (1)

1. Vereinfachen Sie den folgenden Rechenausdruck:

$$\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Rechnen Sie nach (einfach mit Bruchrechnung!), dass gilt:

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} \text{ für natürliche Zahl } n \text{ und } 0 \leq k < n,\ k \text{ ganz.}$$

Was hat die Formel mit dem Pascalschen Dreieck zu tun?

3. Was ist für eine natürliche Zahl n der Wert von $\sum_{k=0}^{n} 2^k$? Vermuten Sie nach Betrachtung kleiner Beispiele wie $n = 2, 3, 4$ etwas, und versuchen Sie dann einen Induktionsbeweis Ihrer Vermutung.

4. Geben Sie die Gleichung in der Form $y = mx + b$ für die Gerade, welche durch den Punkt $(1, -2)$ geht, den Winkel $\pi/3$ mit der $x-$ Achse bildet, ansteigt (mit wachsenden Werten von x wachsen auch auf der Geraden die zugehörigen $y-$ Werte). Hinweis: $\sin(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (Sie können daraus den Wert von $\cos(\pi/3)$ genau ermitteln.)

5. Bringen Sie die Parabel $y = 4x^2 - 3x + 1$ auf Scheitelpunktsform. Lesen Sie auch die Koordinatendarstellung des Scheitelpunkts daraus ab.

6. Ein Punkt P habe in einem Koordinatensystem K für die Ebene die Koordinatendarstellung $(2, 3)$, also $\vec{x}_P^K = (2, 3)$. Das Koordinatensystem wird nunmehr mit dem Vektor $\vec{a}$, $\vec{a}^K = (3, -4)$ (Koordinatendarstellung bzgl K) parallel verschoben, es wird also nur der Ursprung verschoben, Richtungen der Achsen und Einheiten auf den Achsen bleiben gleich. Welche Koordinatendarstellung hat P im neuen System L, was ist also $\vec{x}_P^L$? (Skizze!)

7. Geben Sie für die Gerade $y = -3x + 4$ eine vektorielle Parameterdarstellung. Gehen Sie dazu auf zwei Weisen vor: Einmal überlegen Sie geometrisch einen einfachen geeigneten Aufpunktvektor und einen einfachen passenden Richtungsvektor, das andere Mal gehen Sie mit der bekannten Weise vor, eine unendliche Lösungsmenge einer derartigen Gleichung zu parametrisieren. Vergleichen Sie beide gewonnenen Parameterdarstellungen.

8. Seien $\vec{x}_P^K = (2, 1, -3)$, $\vec{x}_Q^K = (-1, 2, 4)$, in einem beliebigem Koordinatensystem K für den E^3.

   (a) Geben Sie für die Gerade g, welche durch die Punkte P und Q geht, eine Parameterdarstellung, in Koordinatenform. Schreiben Sie die geometrische Form noch dazu.

   (b) Geben Sie die Koordinatendarstellungen der Punkte, welche die Strecke $\overline{PQ}$ in drei gleich lange Teile teilen.

   (c) Wie können Sie eine Parameterdarstellung in Koordinatenform für die Gerade h bekommen, welche aus g hervorgeht durch Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{a}$, $\vec{a}^K = (1, -1, 1)$?

9. Was für ein Gebilde G wird (bei Deutung der Lösungspaare in einem kartesischen System K) beschrieben durch $|x|+|y| \leq 1$? (Skizzieren Sie es auch.) Hinweis: Sie können die Sache zunächst nur für den Fall $x, y \geq 0$ betrachten und die Symmetrien ausnutzen. Wie müssen Sie die Ungleichung modifizieren, damit das Gebilde H beschrieben wird, das aus G durch Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{a}^K = (3, 2)$ entsteht? Denken Sie nunmehr auch darüber nach, wie G aussehen wird, wenn die Deutung nicht in einem kartesischen System geschieht. Skizzieren Sie das Resultat für den konkreten Fall, dass die Einheitsvektoren des neuen (schiefen) Systems lauten $\vec{a}_1^K = (1, 0)$, $\vec{a}_2^K = (1, 1)$.

10. Können Sie aus der vorigen Aufgabe entnehmen, wie man die Menge aller Punkte auf der von einem Dreieck PQR gebildeten *Fläche* parametrisieren kann? Versuchen Sie einer solchen Parametrisierung auch eine symmetrische Form in $\vec{x}_P, \vec{x}_Q, \vec{x}_R$ zu geben.