Übung (2)

1. Hier ist eine äußerst wichtige Vorübung für den Umgang mit linearen Gleichungssystemen: Sie haben die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x+3y-4z &= 1 \\ 3x-4y+3z &= 1. \end{aligned}$$

   Bilden Sie nun (im Kopf, das ist wichtig - schauen Sie genau nach, was Sie sich dabei jeweils nur merken müssen) folgende neue Gleichung: Erste Zeile mal 3 minus zweite Zeile mal 2 (um x hinauszuwerfen). Wir wollen das System jetzt noch nicht lösen. Stattdessen noch einmal dieselbe Übung in etwas schwieriger Form: Sie haben die Gleichungen (Unbestimmte: x, y, alle andern Buchstaben sind äußere Parameter)

$$\begin{aligned} (a+1)\,x-by &= 1 \\ cx+(2a-1)\,y &= 1. \end{aligned}$$

   Bilden Sie (so weit wie möglich im Kopf, schreiben Sie sofort ein vernünftiges Ergebnis hin, wenn das auch vielleicht noch nicht ganz fertig ist, bringen Sie es dann in fertige Form) eine Kombination der Gestalt: Faktor mal erste plus (oder vielleicht lieber minus?) Faktor mal zweite Zeile, *so dass eine Gleichung ohne x / ohne y* entsteht. (Tun Sie Beides.)

2. Lösen Sie die Gleichung $x^2+(a+1)\,x+5=0$ (Unbestimmte: x, a äußerer Parameter). Lösen Sie nunmehr dieselbe Gleichung mit der Auffassung: a und x sind beide Unbestimmte. Welchen Typ hat die Gleichung, wenn man nur a als Unbestimmte auffasst?

3. Sei P der Punkt in der Ebene mit Koordinatendarstellung $(-5,0)$. Geben Sie Gleichungen vom Typ $y=mx+b$ für die Tangenten von P an den Einheitskreis an, der durch die Bestimmungsgleichung $x^2+y^2=1$ beschrieben ist. Was sind in dieser Aufgabe die Unbestimmten?

4. Schreiben Sie $(x-2y)^5$ als entwickelte Summe aus mittels der Binomialkoeffizienten.

5. Sie multiplizieren zwei allgemeine Polynome in x der Grade n und m. (Schreiben Sie diese mit dem allgemeinen Summenzeichen, aber auch mit Pünktchen. Schreiben Sie allgemeine Koeffizienten.)
   (a) Wie lautet im Produkt der Koeffizient zu x^3? (Im Kopf zusammenfassen, nutzen Sie dazu am einfachsten die Pünktchenschreibweise der beiden gegebenen Polynome.)
   (b) Können Sie (a) verallgemeinern für beliebige Koeffizienten? Nutzen Sie nach Erkennen des Bildungsgesetzes wiederum das allgemeine Summenzeichen.

6. Was ist der Unterschied zwischen $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y)$ und $\sum_{i=1}^{n}x_i+y$? Wie könnte man den letzteren Ausdruck besser schreiben?

7. Es seien Zahlenwerte x_i gegeben, $1\le i\le n$. Für solche definiert man folgenden Ausdruck als arithmetisches Mittel:

$$\overline{x}:=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

   Rechnen Sie nach, dass Folgendes gilt:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2.$$

   Deuten Sie auch den Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung als ein arithmetisches Mittel (wovon wird dabei das arithmetische Mittel gebildet?). Denken Sie darüber nach, was dieser Ausdruck beschreibt. (Wer das weiß, sollte sich um eine inhaltlich erklärende Beschreibung für die Kommilitonen bemühen und nicht einfach ein Schlagwort nennen.)

8. Rechnen Sie den Gesamtwiderstand bei einer Parallelschaltung von drei Ohmschen Widerständen der Werte R_1, R_2, R_3 aus. (Bei Parallelschaltung addieren sich die einzelnen Leitwerte (Kehrwerte der Widerstandswerte) zum Leitwert der gesamten Schaltung.) Erkennen Sie ein Bildungsgesetz, und geben Sie eine allgemeine Formel für den Gesamtwiderstand bei Parallelschaltung von n Ohmschen Widerständen R_i, $1\le i\le n$. Nutzen Sie dazu einmal das große Summenzeichen und analog das große Produktzeichen.

9. Aus 12 Mitgliedern eines Clubs, darunter Sie und Ihr Freund, müssen drei für eine unangenehme Arbeit per Zufall ausgewählt werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt es Sie zusammen mit Ihrem Freund? Hinweis: Nutzen Sie die kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten.