Übung (1)

1. Formulieren Sie in Worten genau die Kürzungs- bzw. Erweiterungregel für Brüche. (Welche einheitliche Formulierung reicht für beide Fälle?)

2. Zerlegen Sie den Bruch $\frac{a+b}{c}$ in eine Summe. Zerlegen Sie den Bruch $\frac{ab}{c}$ in ein Produkt (auf mehr als eine Weise).

3. Klammern Sie so viel wie möglich aus, und vereinfachen Sie dann: $\frac{a}{x^2-y^2} + \frac{a}{(x+y)^2}$.

4. Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf (a ist äußerer Parameter): $\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} = \frac{1}{x}$. Geben Sie genau an, für welche Werte von a es welche Lösungsmenge gibt.

5. Begründen Sie, dass (für Zahlen $b \neq 0$) stets $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$ ist. (Sie dürfen dabei die Standardregeln des Bruchrechnens (ohne jede Vorzeichenregel dafür!) sowie die Standardregeln des Multiplizierens (mit Vorzeichenregeln dafür) benutzen. Es genügt allerdings die Regel $-x + x = 0$ als einzige Vorzeichenregel (zusammen mit den bekannten Grundregeln für $+$ und $*$), aber damit wird es wesentlich schwieriger.

6. Betrachten Sie die Ungleichung $y < 1 + x^2$.

   (a) Welche *Paare reeller Zahlen* (x, y) erfüllen diese Ungleichung? (Skizzieren Sie diese Menge von Zahlen auch als Punktmenge in der Ebene mit vorgegebenem kartesischem Koordinatensystem.)

   (b) Welche reellen Zahlen y erfüllen die Ungleichung $y < 1 + x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

   (c) Für welche Zahlen y erfüllen dieselbe Ungleichung *für wenigstens eine reelle Zahl* x?

   (d) Wie sieht die Beziehung zwischen den Lösungsmengen von (b), (c) und der Lösungsmenge von (a) aus?

7. Die Gerade g geht durch die Punkte $(-2, 2)$ und $(3, -4)$. Beschreiben Sie die Gerade in folgenden beiden Formen: $y = mx + b$, $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$. Gehen Sie jedoch direkt über die Zwei-Punkte-Form (lösen Sie also nicht ein lineares Gleichungssystem, um m, b auszurechnen). Überzeugen Sie sich im Beispiel davon, dass α, β tatsächlich die angesprochenen Bedeutungen haben.

8. Bringen Sie die Gleichung $y = -2x^2 + 2x + 5$ in die Formen $y = A(x - \alpha)(x - \beta)$ sowie $y = B(x - c)^2 + d$. (Berechnen Sie also $A, \alpha, \beta, B, c, d$.) Lesen Sie aus der zweiten Form auch wirklich die Koordinaten des Scheitelpunktes ab.

9. Es sei $b_1 < b_2$. Es sei eine Gerade g beschrieben durch $y = mx + b_1$, eine Gerade h durch $y = mx + b_2$. Welche geometrischen Beziehungen bestehen also zwischen g und h? Nun beschreiben Sie über Ungleichungsbedingungen in den Koordinaten die Menge aller Punkte, welche zwischen g und h liegen, die Geraden selbst eingeschlossen.

10. Es sei ein rechtwinkliges Dreieck gegeben mit den Kathetenlängen (das sind die beiden kurzen) x und y. Drücken Sie die Länge der senkrechten Verbindung vom Eckpunkt des rechten Winkels zur gegenüberliegenden Seite (also die Länge der entsprechenden Höhe) mittels x und y aus. (Hinweis: Stellen Sie einen Flächenvergleich an, und nutzen Sie außerdem Pythagoras.) Nutzen Sie das Resultat, um eine allgemeine Formel für den Abstand zwischen zwei Geraden der Form $y = mx + b_1$, $y = mx + b_2$ zu gewinnen.