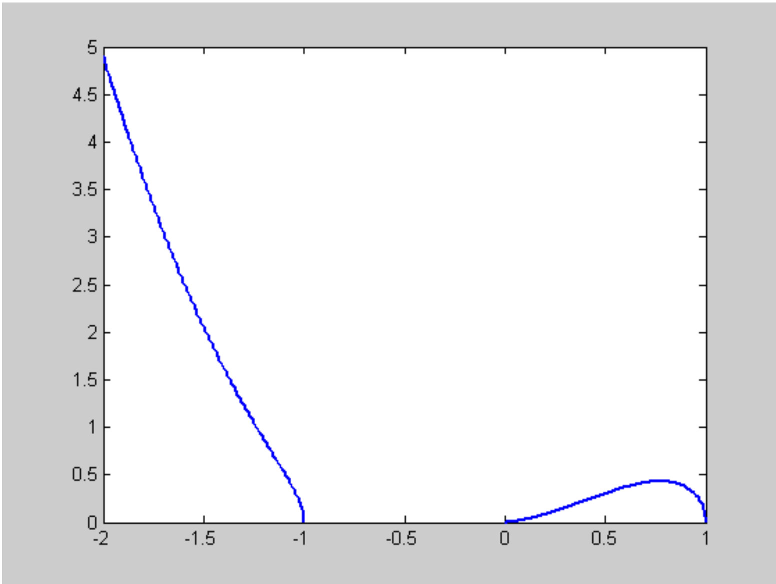
Lösungen zur Übung (15)

1. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sqrt{x^3 - x^5}$ im maximalen reellen Definitionsbereich.

   (a) Der Ausdruck $\sqrt{x^3 - x^5}$ ist offenbar genau dann definiert, wenn $x \leq -1$ oder $0 \leq x \leq 1$. Also ist der Definitionsbereich $]-\infty, -1] \cup [0, 1]$. Die Funktion nimmt nur positive Werte an. Offenbar gibt es an den Rändern absolute Minima mit Funktionswert Null.

   (b) Man hat $\frac{d}{dx}\sqrt{x^3 - x^5} = \frac{3x^2 - 5x^4}{2\sqrt{x^3 - x^5}} = x^2 \frac{3 - 5x^2}{2\sqrt{x^3 - x^5}}$. Diese Ableitung hat eine Nullstelle bei $x = \sqrt{3/5} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$.Dort erleidet die Ableitung einen Vorzeichenwechsel vom Positiven ins Negative, es liegt also ein (relatives) Maximum vor. Für $x \to -\infty$ gehen die Werte von f schnell nach ∞. Damit kann man bereits eine Skizze anfertigen.

   (c) Verfeinerte Betrachtung der Steigungen an den Rändern: An allen Randpunkten $x = -1, 0, 1$ ist der Ausdruck der Ableitung nicht definiert. Aber man kann leicht sehen, dass der Ableitungsausdruck einseitig für $x \to 0, x > 0$, gegen Null geht, dagegen gegen $-\infty$ sowohl für $x \to 1$ $(x < 1)$ als auch für $x \to -1$ $(x < -1)$. So sieht der Graph aus:



2. Der Graph von $f(x) = e^x - x^2 - 1$ ist sehr einfach: Für $x \to \infty$ dominiert der Summand e^x, für $x \to -\infty$ dominiert $-x^2 - 1$. Bei $x = 0$ liegt eine Nullstelle vor, mit Steigung 1. Die Ableitung ist $f'(x) = e^x - 2x$, und das ist überall > 0. Dies ist leicht einzusehen für $x \geq 1$ und für $x \leq 0$. Man kann allgemein so argumentieren: Es muss (mindestens) einen Punkt minimaler Steigung geben, das muss ein Wendepunkt sein. Einziger Kandidat ist mit $f''(x) = e^x - 2$ die Stelle $x = \ln(2)$. Also liegt dort sogar ein absolutes Minimum der Steigung vor, und auch dort ist der Steigungswert positiv: $e^{\ln(2)} - 2\ln(2) = 2 - 2\ln(2) > 0$.

3. Die Gleichung $e^{-\frac{x}{2}} = 5$ ist gleichwertig zu $\frac{-x}{2} = \ln(5)$, hat also die eindeutige Lösung $x = -2\ln(5)$.

4. Alle Maxima der Funktion $f(x) = \sin(3x - 1)$ sind parametrisiert mit
$$x(k) = \left(\frac{\pi}{2} + 1 + 2k\pi\right)/3 = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \; k \text{ ganz.}$$

5. $g'(x) = e^{-x}(\cos(x) - \sin(x))$, das wird Null genau für $\tan(x) = 1$, also für $x(k) = \pi/4 + k\pi$, k ganz. Damit liegen die Maxima bei $\pi/4 + 2k\pi$, k ganz. (Denn an diesen Stellen wechselt das Vorzeichen von g' vom Positiven ins Negative.)

6. $e^{-x}\sin(x) \approx x$ für kleine $|x|$.

7. $\vec{x}'(t) = (1, 2t, \cos(t))$, also steht der Vektor $\vec{x}'(\pi/2) = (1, \pi, 0)$ senkrecht auf E, und der Punkt $(\pi/2, \pi^2/4, 1)$ liegt auf E. Es resultiert die Normalenform für E:
$$x + \pi y = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{4}.$$
E steht senkrecht auf der $xy-$ Ebene.

8. Mit den Ortsvektoren der Eckpunkte bildet man $\vec{a} = \vec{x}_Q - \vec{x}_P$ und $\vec{b} = \vec{x}_R - \vec{x}_P$ und hat den Dreiecks-Flächeninhalt mit $F = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ oder auch mit $F = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2 b^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}$.

9. $\int e^{-x} dx = -e^{-x}$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(1-2x)(3+4x)} dx &= -\int \left(\frac{1}{10(2x-1)} + \frac{3}{10(4x+3)} \right) dx \\
&= -\frac{1}{20} \ln |2x-1| - \frac{3}{40} \ln |4x+3|
\end{aligned}$$