Lösungen der Aufgaben zum Wochenende (4)

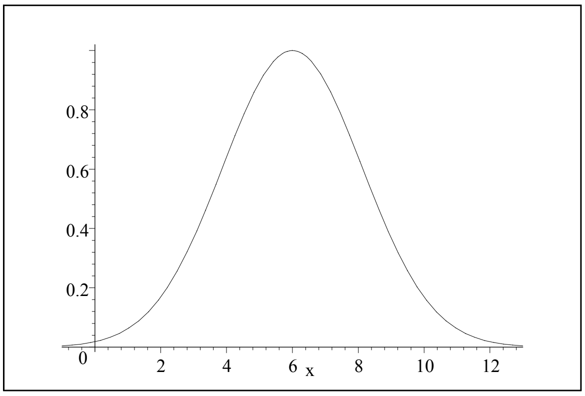
1. (a) $\int \frac{1}{2-7x} dx = -\frac{1}{7} \ln(2-7x)$
   (b) $\int \frac{1}{\sqrt{3x-1}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{3x-1}$ (beide mit $1/\alpha-$ Regel!)
   (c) $\int x\sqrt{x+1}dx = x \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2}$
   (d)
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x-1)(2-x)(3+x)} dx &= \int \left(\frac{1}{4(x-1)} + \frac{4}{5(2-x)} - \frac{9}{20(3+x)} \right) dx \\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{4}{5}\ln|2-x| - \frac{9}{20}\ln|3+x|\end{aligned}$$
   (e) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = x + \ln|x-1| - \ln|x+1|$
   (f) $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$ (Umkehrung Kettenregel)
   (g) $\int x^2 \sin\left(x^3\right) dx = -\frac{1}{3}\cos x^3$ (Umkehrung Kettenregel)
   (h) Mit $u = e^x$, $x = \ln(u)$, $dx = \frac{1}{u}du$ hat man
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-e^{2x}} dx &= \int \frac{1}{u(1+u)(1-u)} du = \ln|u| - \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\ln|u-1| \\ &= x - \frac{1}{2}\ln(1+e^x) - \frac{1}{2}\ln|e^x - 1|\end{aligned}$$

2. (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
   hat die eindeutige Lösung $\vec{x} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 1 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$. Es folgt sofort, dass alle Systeme $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar sind.
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat die unendliche Lösungsmenge, die man mit
$$\vec{x}(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ parametrisieren kann.}$$
   Es folgt sofort, dass $B\vec{x} = \vec{b}$ genau dann lösbar ist, wenn $\vec{b}$ von den ersten beiden Spaltenvektoren erzeugt wird.

3. Seien $\vec{x}_P = (1,2,-3)$, $\vec{x}_Q = (-2,1,4)$, $\vec{x}_R = (2,-3,1)$, in einem kartesischen Koordinatensystem.
   (a) $\vec{x}_E(\lambda,\mu) = (1,2,-3) + \lambda(-3,-1,7) + \mu(1,-5,4)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, z.B.
   (b) Normalenform für E: $(-3,-1,7) \times (1,-5,4) = (31,19,16)$, also mit $(31,19,16)(1,2,-3) = 21$ die Normalenform $31x + 19y + 16z = 21$.
   (c) Der Winkel zwischen der Ebene und der $z-$ Achse ist
$$\arcsin\left(\frac{16}{\sqrt{31^2+19^2+16^2}}\right) \approx 0.415.$$
   Das sind knapp 24 Grad.
   (d) Der Abstand zwischen E und dem Ursprung ist $\frac{21}{\sqrt{31^2+19^2+16^2}} = \frac{7}{526}\sqrt{1578}$ (ungefähr 0.53).
   (e) $(-2,-6,11)(31,19,16) = 0$, also liegt g parallel zu E, da der Richtungsvektor von g senkrecht zum Normalenvektor von E liegt.
   (f) $\vec{x}_h(\lambda) = (1,2,-3) + \lambda(31,19,16)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Wir betrachten $f(x) = e^{-(x/3-2)^2}$. Es handlet sich um eine lineare Transformation von e^{-x^2}, der Graph zu e^{-x^2} ist sehr leicht zu sehen: Alle Werte sind positiv, vom Maximum bei $x=0$ fällt der Graph sehr schnell symmetrisch zu beiden Seiten nach Null, ohne sie zu erreichen, Asymptote für $x \to \pm\infty$ ist die $x-$ Achse. Um auf den Graphen von f zu kommen, braucht man nur um 2 nach rechts zu verschieben und mit Faktor 3 längs der $x-$ Achse zu strecken. Es entsteht also eine breitere Glocke, deren Maximum bei $x=6$ liegt. Das bestätigt auch die Ableitung: $\frac{d}{dx}e^{-(x/3-2)^2} = -\frac{2}{3}(x/3-2)e^{-(x/3-2)^2}$, einzige Nullstelle ist $x=6$, und dort liegt ein Maximum

wegen des Vorzeichenwechsels der Ableitung von positivem zu negativem Vorzeichen an dieser Stelle. So sieht der Graph aus:



5. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ in deren maximalem reellen Definitionsbereich.

   (a) Der Definitionsbereich ist maximal $]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$. An den Rändern $x = -1$, $x = 1$ liegt jeweils ein Pol vor.

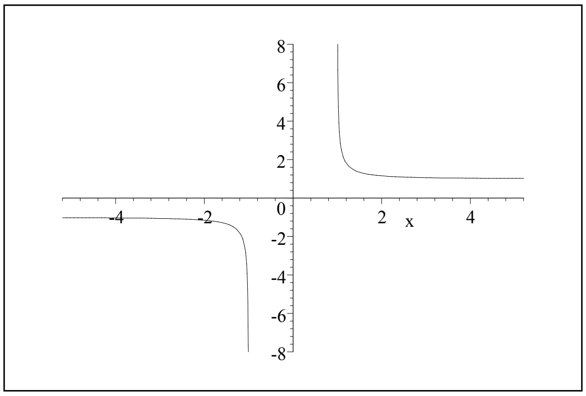
   (b) f ist eine ungerade Funktion.

   (c) Der Wert von f ist positiv im Bereich $[1, \infty[$, negativ auf der anderen Seite. (Es gibt keine Nullstelle, auch nicht bei $x = 0$, was gar nicht zum Definitionsbereich gehört.)

   (d) Für $x \to \infty$ hat man offenbar $f(x) \to 1$, der Punktsymmetrie zum Ursprung entsprechend $f(x) \to -1$ für $x \to -\infty$.

   (e) $f'(x) = -\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$, also $f'(x) < 0$ für alle x im Definitionsbereich. (Im gesamten Definitionsbereich von f ist f ableitbar.) Alle Ableitungswerte sind < 0. Das bedeutet: f ist im Bereich $]-\infty, -1[$ streng monoton fallend und ebenso im Bereich $]1, \infty[$ streng monoton fallend, aber nicht etwa global monoton fallend, da alle Werte im Bereich $]1, \infty[$ größer sind als alle im Bereich $]-\infty, -1[$. Das wird möglich durch die Pole. Es folgt, dass es keinerlei auch nur lokale Extrema gibt.

   (f) Hier ist der Graph von f :



6. Zur Näherung 1. Ordnung von $f(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^3}$ für x nahe bei 1: $f(1) = \frac{1}{8}\pi$ und $f'(x) = \frac{1+x^3-3\arctan(x)\left(x^2+x^4\right)}{(x^2+1)(1+x^3)^2}$ also $f'(1) = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\pi$, daher die gewünschte Näherung 1. Ordnung:

$$
\begin{aligned}
f(1+\Delta x) &\approx \frac{1}{8}\pi + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\pi\right) \Delta x \text{ für kleine } |\Delta x|, \text{ also} \\
f(x) &\approx \frac{1}{8}\pi + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\pi\right)(x-1) \text{ für kleine } |x-1|.
\end{aligned}
$$