Lösungen zur Übung (14)

Vorbemerkung: Bei allen unbestimmten Integralen ist das obligatorische '$+c$' gespart.

1. (a) $\int_0^1 \left(3+\sin(x)+2e^x-\sqrt[3]{x^4}\right)dx = \left[3x-\cos(x)+2e^x-\frac{3}{7}x^{7/3}\right]_0^1 = \frac{11}{7}-\cos(1)+2e$ (Es genügt die Linearitätsregel neben den Grundintegralen.)
   (b) $\int_0^2 \ln(2)\,dx = 2\ln(2)$, direkt zu sehen mit der Flächendeutung!
   (c) $\int (2x+3)^{20}\,dx = \frac{1}{42}(2x+3)^{21}$, $\int \frac{1}{1-\frac{x}{2}}dx = -2\ln\left|1-\frac{1}{2}x\right|$, $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x-1)^2}$ (alle diese sollte man im Kopf auszurechnen versuchen!)
   (d) $\int \ln(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}\left((2x-1)\ln(2x-1)-(2x-1)\right) = -x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2x-1)\ln(2x-1)$
2. (a) $\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x)-\int -\cos(x)\,dx = \sin(x)-x\cos(x)$
   (b) Das Integral $\int \sin(x)\cos(x)\,dx$ auf drei Weisen berechnet:
      i. Partielle Integration mit $F(x)=\sin(x)$, $g(x)=\cos(x)$:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(x)\,dx &= \sin^2(x)-\int \cos(x)\sin(x)\,dx, \text{ also}\\ 2\int \sin(x)\cos(x)\,dx &= \sin^2(x), \text{ daher}\\ \int \sin(x)\cos(x)\,dx &= \frac{1}{2}\sin^2(x).\end{aligned}$$

Es ist für solche Fälle recht typisch, dass man das auszurechnende Ausgangsintegral auf der anderen Seite noch einmal bekommt und auf die linke Seite schafft. Praktisch ist das nicht gerade.

      ii. Umformung mit Additionstheorem:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x).$$

Das ist viel praktischer, aber ist das Ergebnis korrekt? Es sieht doch ganz anders aus als das erste. Dazu müssen wir uns besinnen, dass die Resultate ordentlich formuliert so aussehen: Zu (i): Das unbestimmte Integral ist die *Schar* der Funktionen $\alpha_c(x)=\frac{1}{2}\sin^2(x)+c$, zu (ii): Das unbestimmte Integral ist die Schar der Funktionen $\beta_d(x)=-\frac{1}{4}\cos(2x)+d$. Dass beide Resultate gleich sind, bedeutet daher: Es muss eine Konstante A geben, so dass $\frac{1}{2}\sin^2(x)+A=-\frac{1}{4}\cos(2x)$. Mit Additionstheorem haben wir:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\cos(2x) &= -\frac{1}{4}\cos^2(x)+\frac{1}{4}\sin^2(x)\\ &= -\frac{1}{4}\left(1-\sin^2(x)\right)+\frac{1}{4}\sin^2(x)\\ &= -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sin^2(x).\end{aligned}$$

Also bemerken wir, dass die Sache stimmt, mit $A=-\frac{1}{4}$.

      iii. Nun die im vorliegenden Fall beste Methode, Umkehrung der Kettenregel. Beachten Sie: Die Ableitung von sin ist cos. Allerdings haben wir keine Schachtelung, können aber als besonders einfache äußere Funktion die Identität nehmen, deren Stammfunktion $\frac{1}{2}x^2$ ist. Für x ist $\sin(x)$ einzusetzen, fertig. Hier mit formaler Substitution $u=\sin(x)$, $du=\cos(x)\,dx$ ausgeführt, mit Rückeinsetzen von $\sin(x)$ für u nach Auswerten des Integrals:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\sin^2(x).$$

3. Berechnen Sie folgende Integrale zum Thema: 'Integrationsfreundliche Umformung':
   (a) $\int 2^x dx = \int e^{x\ln(2)}dx = \frac{1}{\ln(2)}2^x$
   (b) $\int \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)dx = \int \frac{1}{3}\ln(x)\,dx = \frac{1}{3}(x\ln(x)-x)$
   (c) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int \left(\frac{1}{x}+x^{-3/2}\right)dx = \ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}$
   (d) Nach Additionstheorem ist $\sin^2(x)=\frac{1}{2}(\cos(0)-\cos(2x))=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$, also

$$\int_0^1 \sin^2(x)\,dx = \int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = \left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin(2)$$

Man beachte: Der dritte, günstigste Weg von 2.(b) ist hier nicht gangbar. Aber eben der zweite, und der ist besser als der erste.

(e) Der zu integrierende Ausdruck ist fertig für die Partialbruchzerlegung, allerdings ist für Nenner $1-x$ und $2-3x$ noch $1/\alpha-$ Regel anzuwenden nötig. Die Partialbruchzerlegung erreiche man unbedingt direkt (das geht hier sogar im Kopf oder mit ganz wenig Schreibarbeit, auf keinen Fall addiere man formal und stelle Gleichungen für zwei Unbestimmte auf!).

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(1-x)(2-3x)} dx &= \int \left(\frac{-1}{1-x} + \frac{2}{2-3x} \right) dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{3} \ln|2-3x| \end{aligned}$$

(f) Anders als bei (e) muss man (im Schema 'Integration gebrochen rationaler Funktionen') Polynomdivision durchführen, dann aber entsteht direkt sehr Einfaches: $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = x - \ln|x+1|.$$

Es geht aber auch so: Man substituiert $u = x+1$, $du = dx$ und bekommt:

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{u-1}{u} du = u - \ln|u| = x + 1 - \ln|x+1|.$$

(Man beachte, dass sich die Resultate nur um eine Konstante unterscheiden, vgl. ausführlicher Kommentar zu 2.(b).

4. (Wir führen jeweils die Substitution aus, aber es geht auch jeweils direkt bei entsprechender Übersicht. Gegebenfalls ergänzen wir im Integral einen fehlenden konstanten Faktor und schreiben den Kehrwert vor das Integral.)

(a) $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} e^{x^2}$. (Subst. $u = x^2$)

(b) $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+u}} du = 2\sqrt{1+u} = 2\sqrt{1+\sin(x)}$. (Subst. $u = \sin(x)$, man könnte auch $u = 1 + \sin(x)$ setzen.)

(c) $\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 = \frac{1}{3} \ln^3(x)$ (Subst. $u = \ln(x)$)

(d) $\int \frac{1-x^2}{-2x+\frac{2}{3}x^3} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = -\frac{1}{2} \ln\left|-2x + \frac{2}{3}x^3\right|$ (Subst. $u = -2x + \frac{2}{3}x^3$) Man kann noch einsehen, dass auch $-\frac{1}{2} \ln\left|-6x + 2x^3\right|$ eine Stammfunktion ist. Wieso?

5. Mit $f(0) = 1$ und $f'(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ haben wir:

$$f(x) = 1 + \int_0^x 2t dt = 1 + \left[t^2\right]_0^x = 1 + x^2.$$