Lösungen zur Übung (13)

1. Da $\arctan(x) \to 0$ für $x \to 0$ und $x \to 0$ für $x \to 0$, sind die Voraussetzungen für die Regel von de L'Hospital gegeben. Da $\lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x^2)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$ (direkt zu sehen!), hat man also $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$.

2. Man hat mit $f(x) = \arctan^2(x) - x^2$, dass $f'(x) = 2\arctan(x)\frac{1}{1+x^2} - 2x$. Wir wollen sehen, dass $f'(x) \leq 0$ für $x \geq 0$. Das bedeutet gleichwertig: $\arctan(x) \leq x + x^3$. Diese Ungleichung gilt für $x = 0$, und sie gilt für die Ableitungen: $\frac{1}{1+x^2} \leq 1 + 3x^2$. Da wir dabei den Term x^2 noch weglassen können, haben wir sogar $\arctan(x) \leq x$ für $x \geq 0$, daher schärfer $\arctan(x) < x + x^3$ für $x > 0$. Somit ist die Funktion f sogar streng monoton fallend im Bereich $x \geq 0$, da die Ableitung außer bei $x = 0$ überall echt kleiner ist als Null.

3. Die Ungleichung $\arctan(x) \leq x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$ gilt für $x = 0$, folgleich genügt nach dem Satz vom beschränkten Zuwachs, dass die entsprechende Ungleichung für die Ableitungen gilt, also

$$\frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4 \text{ für } x \geq 0.$$

Man hat $\left(1 - x^2 + x^4\right)\left(1 + x^2\right) = 1 + x^6$, damit kann man $(*)$ direkt einsehen. (Manchmal benötigt man mehrere Anwendungen des Satzes, hier nicht.)

4. Wir haben mit $\vec{x}(t) = (a\cos(t, b\sin(t)))$, dass $\vec{x}'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t))$. Damit

$$\vec{x}(t)\,\vec{x}'(t) = \left(b^2 - a^2\right)\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)\sin(2t).$$

Für $a = b$ (wir setzen voraus: $a > 0, b > 0$) wird das stets Null, das ist der Fall des Kreises, den wir bereits kennen. Aber für $a \neq b$ haben wir im Bereich $[0, 2\pi[$ lediglich die Nullstellen $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$, $t = 3\pi/2$. Es handelt sich also genau um die Schnittpunkte der Bahn mit den Achsen, wo dies geschieht.

5. Auftreffen auf die $xy-$ Ebene geschieht für t mit $\frac{1}{3}t^2 - 2t = 0$ also $t_1 = 0$, $t_2 = 6$. Der Tangentialvektor an die Bahn ist jeweils (man beachte: $\vec{x}'(t) = \left(1, 2t, \frac{2}{3}t - 2\right)$ für alle t)

$$\begin{aligned} \vec{x}'(t_1) &= (1, 0, -2), \\ \vec{x}'(t_2) &= (1, 12, 2). \end{aligned}$$

Der Winkel ist also im ersten Fall

$$\arcsin\left(\frac{(0,0,1)\cdot(1,0,-2)}{\sqrt{5}}\right) = -1.107$$

und im zweiten Fall

$$\arcsin\left(\frac{(0,0,1)\cdot(1,12,2)}{\sqrt{5}}\right) = 1.107$$

Man beachte, dass arcsin ungerade Funktion ist, also nicht zwei mal gerechnet werden muss. Der Winkel ist also in beiden Fällen derselbe, nur geht es bei t_1 von der Seite der positiven $z-$ Werte auf die Seite der negativen und für t_2 gerade umgekehrt.

6. Die lokale Steigung von f an der Stelle x ist jeweils $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Die globale Steigung von f im Intervall $[0, 1]$ beträgt

$$\frac{\ln(2) - \ln(1)}{1} = \ln(2).$$

Wir haben also die Gleichung zu lösen:

$$\frac{2x}{1+x^2} = \ln(2).$$

Der Mittelwertsatz verspricht, dass diese Gleichung *mindestens* eine Lösung im Bereich $]0, 1[$ besitzt. Das ist eine einfache quadratische Gleichung, ordentlich aufgeschrieben und in Normalform gebracht:

$$x^2 - \frac{2}{\ln(2)}x + 1 = 0$$

Lösungen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1}{\ln(2)} \pm \sqrt{\frac{1}{\ln^2(2)} - 1} \text{ oder} \\ x_{1,2} &= \frac{1}{\ln(2)} \pm \frac{1}{\ln(2)}\sqrt{1 - \ln^2(2)} \end{aligned}$$

Man beachte: Das ergibt zwei reelle Lösungen, beide sind positiv, aber nur $x_2 = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)}\sqrt{1 - \ln^2(2)}$ liegt im Bereich $]0, 1[$ (es ist ungefähr 0.4). Es gibt also genau eine Lösung in $]0, 1[$.

7. Da $0 \leq \sin^3\left(1+x^2\right) \leq \sin^3(2)$ für $0 \leq x \leq 1$ (beachten Sie, dass die Funktion monoton steigend ist!), hat man

$$0 \leq \int_0^1 \sin^3\left(1+x^2\right) dx \leq \sin^3(2)\,.$$

8. $\int_{-1}^1 \arctan^3\left(x^5\right) dx = 0$, da die Funktion ungerade ist.

9. $f(n) = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ für alle natürlichen $n \geq 0$. Also gehen die Werte nach Null.

10. Der Mittelwert hat der Funktion $g(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$ im Intervall $[0,2]$ ist

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \left(1+\sqrt[3]{x}\right) dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{3}{4}x^{4/3}\right]_0^2 = 1 + \frac{3}{8}\sqrt[3]{16} = 1 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}.$$