Lösungen zur Übung (12)

1. $\frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{4+x^2}$,

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \left(1+x^2\right)(-1)\,2x\left(1+x^2\right)^{-2} = \frac{-2x}{1+x^2} \text{ (voll mit iterierter Kettenregel)},$$

bequemer aber:

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{d}{dx} - \ln\left(1+x^2\right) = \frac{-2x}{1+x^2}.$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sin^2(3x)} = -2\sin^{-3}(3x)\cdot 3\cos(3x) = \frac{-6\cos(3x)}{\sin^3(3x)}.$$

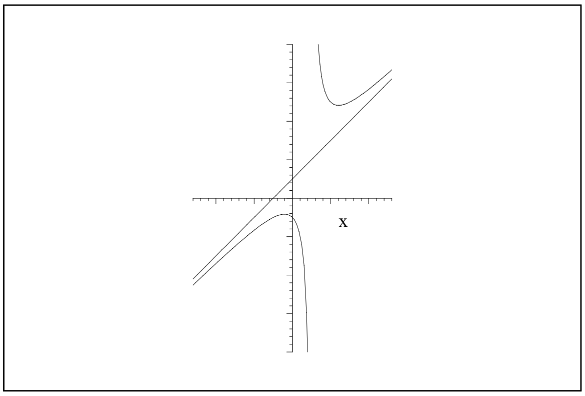
2. Die Näherung 1. Ordnung von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in kleiner Umgebung von $x_0 = 1$: Wir haben $\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, also $f'(1) = -\frac{1}{2}$ und $f(1) = \frac{1}{2}$, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+(1+\Delta x)^2} &\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Delta x, \text{ für kleine } |\Delta x|, \text{ also} \\ \frac{1}{1+x^2} &\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1), \text{ für } x \text{ nahe bei 1.} \end{aligned}$$

3. Für die Funktion $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ sehen wir sofort, dass sie in $x = 1$ nicht definiert ist, dort liegt ein Pol vor, Vorzeichen beim Pol: Rechts positiv, links negativ. Für $x \to \infty$ gehen die Werte von f nach ∞, für $x \to -\infty$ nach $-\infty$, und zwar in linearer Weise. Die genaue Asymptote sehen wir mit Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \left(x^2+1\right) \;:\; (x-1) \;=\; x+1+\dfrac{2}{x-1} \\ \underline{-(x^2-x)} \\ \quad x+1 \\ \underline{-\,(x-1)} \\ \qquad 2 \end{array}$$

Die Asymptote ist also $y = x+1$, ihr nähert sich der Graph für große $|x|$ auf beiden Seiten an. Damit ist folgendes Bild qualitativ klar:

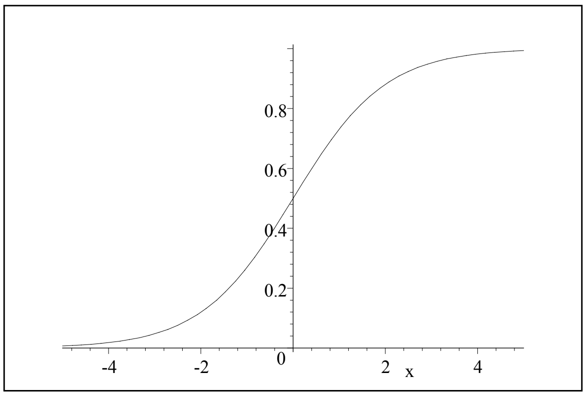


Was noch fehlt, ist die quantitative Berechnung der Extremstellen und die Bestätigung, dass es nicht mehr als zwei Kandidaten für Extremwerte überhaupt gibt. Dazu berechnen wir die Ableitung und finden: $\frac{d}{dx}\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$, und $x^2-2x-1 = 0$ hat die einzigen Lösungen $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Dort liegen also die Extrema (relatives Maximum links und relatives Minimim rechts).

4. Wir betrachten die Funktion $h(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, auf $\mathbb{R}$.

   (a) $h'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, das ist überall positiv, nirgends Null. Somit ist h global streng monoton steigend.

   (b) Für $x \to -\infty$ gehen die Werte von h offenbar nach Null, für $x \to \infty$ nach 1, also ist das Bild von h das Intervall $]0,1[$. Damit ist die Skizze grob qualitativ klar, mit $h(0) = 1/2$:



(c) Laut Skizze gibt es mindestens einen Wendepunkt, und zwar ein globales Maximum von h'. Mit der zweiten Ableitung bestätigen wir dies und finden genauer, das es nur einen einzigen Wendepunkt gibt und das dieser bei $x = 0$ liegt: $h''(x) = e^x \frac{1-e^x}{(1+e^x)^3}$, einzige Nullstelle ist offenbar $x = 0$.

(d) Da h global streng monoton steigend ist, muss die Funktion $h : \mathbb{R} \to]0,1[$, $h(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, eine (eindeutige) Umkehrfunktion $h^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$ besitzen. Um einen Rechenausdruck für $h^{-1}(x)$ zu finden, haben wir die (eindeutig lösbare!) Gleichung

$$h(y) = \frac{e^y}{1+e^y} = x$$

nach y aufzulösen für beliebig im Intervall $]0,1[$ (!) vorgegebenen Wert x. Die Gleichung bedeutet gleichwertig:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^{-y}+1} &= x, \\
e^{-y} &= -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}, \\
-y &= \ln\left(\frac{1-x}{x}\right), \\
y &= \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$h^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Man beachte, dass mit $0 < x < 1$ Zähler und Nenner des Bruches $\frac{x}{1-x}$ positiv sind, der Logarithmuswert also existiert.

(e) Wir modifizieren den Ausdruck von h derart, dass der Graph an der Wendestelle beliebig steil (oder flach) wird und dass die Wendestelle beliebig einstellbar ist:

$$h_{\alpha,\beta}(x) = \frac{e^{\alpha(x-\beta)}}{1+e^{\alpha(x-\beta)}}.$$

Große α bedeuten große Steigung beim Wendepunkt, β sorgt für die Lage des Wendepunktes bei $x = \beta$. Negatives α bedeutet Fallen der Funktion statt Ansteigen.

5. $f(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha)^2$ hat die Ableitung $f'(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -2(x_i-\alpha)$. Dass diese Núll wird, bedeutet $0 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\alpha$, also $\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. (Beachten Sie das praktische Weglassen konstanter Faktoren!) Der Graph von f ist eine nach oben geöffnete Parabel, also handelt es sich um ein globales Minimum. Beachten Sie noch: Mit eingesetztem $\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ handelt es sich um die mittlere quadratische Abweichung der Einzelwerte x_i von ihrem Mittelwert, so rechnet man die Varianz einer Zufallsvariablen aus (hier im Spezialfall, dass x_i alle vorkommenden Werte sind und alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen). Andererseits nutzt man diesen Ausdruck, um bei Vorliegen einer Stichprobe einen Schätzwert für die Varianz der Zufallsvariablen zu bekommen, von der man in der Stichprobe die Werte x_i erhalten hat. Allerdings setzt man dann als Vorfaktor $\frac{1}{n-1}$ (n muss größer sein als 1), weil es sonst zu einer systematischen Unterschätzung der Varoanz käme.

6. Auch bei $f(p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ lassen wir zunächst den konstanten positiven Faktor $\binom{n}{k}$ weg und bilden nur (Ausklammern!)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}\left(p^k (1-p)^{n-k}\right) &= kp^{k-1}(1-p)^{n-k} - (n-k)(1-p)^{n-k-1} p^k \\
&= p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}\left(k(1-p) - (n-k)p\right) \\
&= p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}(k - np).
\end{aligned}$$

Das wird für $0 < p < 1$ Null genau für $p = \frac{k}{n}$. Der Vorzeichenwechsel der Ableitung an dieser Stelle (von Plus nach Minus!) macht klar, dass es sich um ein Maximum handelt, global für den Bereich $]0,1[$. Logarithmieren macht die Sache wesentlich bequemer: die Funktion g

$$g(p) = \ln(f(p))$$

hat dieselben Maxima wie f, da der Logarithmus streng monoton steigt und im Übrigen die Werte von f im bezeichneten Bereich größer sind als Null, so dass g dort überall definiert ist. Wir haben:

$$\begin{aligned} g(p) &= \ln\left(\binom{n}{k}\right) + k\ln(p) + (n-k)\ln(1-p), \\ g'(p) &= \frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p}. \end{aligned}$$

Nun lösen wir $g'(p) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{k}{p} &= \frac{n-k}{1-p} \text{ bedeutet} \\ k(1-p) &= (n-k)p, \text{ gleichwertig} \\ p &= \frac{k}{n}. \end{aligned}$$

7. Um mit der Regel von de L'Hospital $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2(x)}{x}$ zu ermitteln, bilden wir die Ableitungen von Zähler und Nenner (nicht die Ableitung des Quotienten!) und finden $\frac{2\ln(x)/x}{1} = \frac{2\ln(x)}{x}$, hier gehen immer noch Zähler und Nenner gegen Unendlich für $x \to \infty$, also wenden wir denselben Prozess noch einmal an und bekommen $\frac{2}{x}$, was banalerweise nach Null geht. Das ordentliche Argument läuft nun so: Da $\frac{2}{x} \to 0$ für $x \to \infty$, gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)}{x} = 0$ mit der Regel, da der Bruch $\frac{2\ln(x)}{x}$ die Voraussetzungen dafür erfüllt. Da $\lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)}{x} = 0$ und da der Bruch $\frac{\ln^2(x)}{x}$ die Voraussetzungen für die Anwendung der Regel erfüllt, gilt auch $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2(x)}{x} = 0$. Daraus kann man nun leicht einen Induktionsbeweis dafür machen, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^n(x)}{x} = 0$. Denn das gilt, wie soeben festgestellt, für $n = 1$. Setzen wir die Korrektheit der Aussage für n (beliebig, fest) voraus. Dann gilt auch $\lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)\ln^n(x)}{x} = 0$ (Multiplikation mit der Konstanten $(n+1)$). Wir haben zu zeigen, dass nun auch $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^{n+1}(x)}{x} = 0$. Die Voraussetzungen für die Anwendung von de L'Hospital gelten, Zähler und Nenner gehen beide nach Unendlich für $x \to \infty$. Also: Wenn $\lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)\ln^n(x)/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)\ln^n(x)}{x}$ existiert, so auch $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^{n+1}(x)}{x}$, und beide haben denselben Wert. Aber wir haben oben aus der Induktionsvoraussetzung gefogert, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)\ln^n(x)}{x} = 0$. Also $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^{n+1}(x)}{x} = 0$, und insgesamt haben wir nunmehr, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt.

8. $\lim_{x\to 1} \frac{x}{\ln(x)}$ existiert nicht, auch nicht als Grenzwert ∞, denn für $x \to 1$, $x > 1$, haben wir den Grenzwert ∞, für $x \to 1$, $x < 1$, den Grenzwert $-\infty$. Somit existiert kein Grenzwert. Das bedeutet: $\lim_{x\to 1} \frac{x}{\ln(x)}$ ist kein korrekter Ausdruck. Da der Zähler für $x \to 1$ gegen 1 geht und der Nenner gegen Null, haben wir keinen Anwendungsfall für die Regel von de L'Hospital! Wenn man das nicht beachtet, bekommt man vielfach so falsche Resultate wie im vorliegenden Falle: Der Quotient der Ableitungen ist $\frac{1}{1/x} = x$, und der geht nach 1. Wenn man übersähe, dass gar kein Anwendungsfall der Regel vorliegt, so würde man denken, sie ergäbe hier den Grenzwert 1. Dabei existiert überhaupt keiner!