Lösungen zur Übung (11)

1. $\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$,
$$\frac{d}{dx}\arctan\left(1+x^2\right) = \frac{2x}{1+\left(1+x^2\right)^2},$$
(Das kann man direkt hinschreiben, und es empfiehlt sich keinerlei weitere Umformung!)
$\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}\frac{x-2}{(x-1)\sqrt{1-x}}$.

2. Wir zerlegen (rein algebraisch!):
$$\begin{array}{rcl} f(x_0+\Delta x) & = & 1+(x_0+\Delta x)^4 \\ & = & 1+x_0^4 \quad + 4x_0^3\Delta x \quad + 6x_0^2\Delta x^2 + 4x_0\Delta x^3 + \Delta x^4 \\ \text{(man erkenne)} & : & f(x_0) \quad + 4x_0^3\Delta x \quad + R(\Delta x). \end{array}$$
Nachprüfen der Restbedingung 1. Ordnung: $R(\Delta x)/\Delta x \to 0$ für $\Delta x \to 0$ stimmt offenbar, da alle Summanden in $R(\Delta x)$ mindestens den Faktor Δx^2 enthalten. Daraus folgt zwingend: Der Faktor bei Δx ist die Ableitung von f an der Stelle x_0, also:
$$f'(x_0) = 4x_0^3.$$

3. Für unsere Frage ist zunächst einzusehen: $f(x) = \ln(1+\sin(x))$ ist die Funktion, von welcher eine Näherung 1. Ordnung zu bilden ist. Die Stelle x_0, um welche diese Näherung gebildet werden soll, ist $x_0 = 0$ ('kleine $|x|$'). Wir haben
$$f(0) = 0,\ f'(x) = \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)},\ \text{also } f'(0) = 1$$
Schreiben wir die gesuchte Näherung zuerst einmal auf mit Δx :
$$f(0+\Delta x) \overset{1.\ Ordnung}{\approx} 0+\Delta x \text{ (für kleine } |\Delta x|\text{)}$$
Nunmehr schreiben wir dafür gleichwertig gemäß der Fragestellung:
$$f(x) \overset{1.\ Ordnung}{\approx} x \text{ (für kleine } |x|\text{)}.$$
Speziell für $x = 0.01$ haben wir:
$$\begin{array}{rcl} \text{Absoluter Fehler} & = & f(0.01) - 0.01 \approx -4.98\cdot 10^{-5}, \\ \text{relativer Fehler} & = & \dfrac{f(0.01)-0.01}{f(0.01)} \approx -0.005. \end{array}$$

4. Näherung 1. Ordnung für $\sin(x)$ für x nahe bei $\pi/4$:
$$\sin(\pi/4+\Delta x) \approx \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Delta x,$$
nun umgeschrieben mit $x = \pi/4 + \Delta x$:
$$\sin(x) \approx \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

5. Für $\vec{x}(t) = (1,2,3) + (1,2,5)\,t + (-2,1,-4)\,t^2$ hat man:
   (a) $\vec{x}'(t) = (1,2,5) + 2t(-2,1,-4)$, $\vec{x}''(t) = 2(-2,1,-4)$.
   (b) $((1,2,5)+2t(-2,1,-4))\cdot(-2,1,-4) = -20+42t$, das wird Null genau für $t = \frac{10}{21}$.
   (c) Der Scheitelpunkt der Parabel-Bahn hat daher den Ortsvektor $\vec{x}\left(\frac{10}{21}\right)$.

6. Man hat für $\vec{x}(t) = (2\cos(t), 3\sin(t)) : \vec{x}'(t) = (-2\sin(t), 3\cos(t))$, also $\vec{x}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$, also ist $(-2,3)$ ein Richtungsvektor für die Tangente an die mit $\vec{x}$ parametrisierte Ellipsenbahn, daher ergibt sich für die gesuchte Tangente eine Parameterdarstellung (als Aufpunktvektor wählen wir naheliegend $\vec{x}\left(\frac{\pi}{4}\right)$):
$$\vec{y}(\lambda) = \left(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) + \lambda(-2,3),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

7. Die korrekte Ableitung von $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ lautet $-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, also für $x_0 = \frac{1}{1000}$: $f'\left(\frac{1}{1000}\right) \approx -0.540302$ (so weit korrekter Näherungswert). Näherung durch den Differenzenquotienten liefert
$$f'\left(\frac{1}{1000}\right) \approx \frac{\sin\left(1000+\frac{1}{10000}\right) - \sin(1000)}{\frac{1}{10000}} \approx 0.56234,$$

das ist schon recht schlecht, im Vergleich für die Ableitung der Quadratfunktion an der Stelle $x_0 = 1$: Korrekt ist der Wert 2, Näherung durch Differenzenquotienten mit $\Delta x = \frac{1}{1000}$ ergibt

$$\frac{1.0001^2 - 1}{1/10000} = 2.0001,$$

viel besser. Der ungünstige Näherungswert im ersten Fall resultiert aus der großen Steigung der Funktion an der betreffenden Stelle.

8. Wir haben $\vec{x}'(3) = (-\sin(3), \cos(3))$, und dies ist für alle Zeiten $t \geq 3$ der konstante Geschwindigkeitsvektor, da sich das Teilchen ohne Einwirkung von Kräften gleichförmig geradlinig weiterbewegt. Also lautet der Ort für alle Zeitpunkte $t \geq 3$:
$$\vec{x}(t) = (\cos(3), \sin(3)) + (t-3)(-\sin(3), \cos(3)), \ t \geq 3.$$

9. Aus der Gleichung $f(-x) = f(x)$ folgt durch Differenzieren beider Seiten: $-f'(-x) = f'(x)$, und die Allgemeingültigkeit dieser Gleichung bedeutet genau, dass f' ungerade ist.