# Lösungen der Aufgaben zum Wochenende (3)

1. Ein Richtungsvektor für die Schnittgerade ist $(2,1,-3)\times(1,2,2)=(8,-7,3)$. (Dass es stets eine Schnittgerade geben muss, ist damit garantiert, dass die Normalenvektoren der Ebenen nicht parallel sind.)

2. Jede der beschriebenen Geraden hat einen Projektionspunkt $(\cos t,\sin t,0)$ auf der $xy-$ Ebene, durch den sie festgelegt wird, $0\leq t<2\pi$. Wir haben also für die Schar der zu beschreibenden Graden durch den Ursprung, welche einen Winkel von $\pi/3$ mit der $z-$ Achse bilden, einen freien Parameter $t$, der als äußerer Parameter in den anzugebenden Parametrisierungen der einzelnen Geraden auftritt. Wir suchen nunmehr den Punkt $(\cos t,\sin t,z)$ mit $z>0$ auf der Geraden zum Winkel $t$ auf - diese Gerade nennen wir $g_t$, so dass der Winkel zwischen dem Orsvektor $(\cos t,\sin t,z)$ mit der $z-$ Achse gerade $\pi/3$ wird, Bedingung ist:

$$\frac{(\cos t,\sin t,z)\,(0,0,1)}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{1}{2}.$$

Das ergibt die eindeutige Lösung $z=\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Somit haben wir einen weiteren Punkt außer dem Ursprung für jede der fraglichen Geraden, also folgende Schar von Parameterdarstellungen:

$$\text{Für } 0\leq t<2\pi:\ \vec{x}_{g_t}(\lambda)=\lambda\left(\cos t,\sin t,\frac{1}{3}\sqrt{3}\right),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

(a) $\frac{d}{dx}\left(2e^x-3\cos(x)+\frac{1}{x^{3/2}}\right)=2e^x+2\sin(x)-\frac{3}{2}x^{-5/2}$, $\frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\ln(2)}=\frac{\cos(x)}{\ln(2)}$ (man benötigt nicht etwa die Quotientenregel, da $\ln(2)$ eine einfache Konstante ist!

(b) $\frac{d}{dx}(x\sin(x))=\sin x+x\cos x$, $\frac{d}{dx}\frac{x}{1-x^2}=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$, $\frac{d}{dt}\frac{x}{(x-t)(x-2)}=\frac{x}{(x-t)^2(x-2)}$, und dies produziert man am besten so, dass man mit Kettenregel $\frac{d}{dt}(x-t)^{-1}$ ausrechnet und $\frac{x}{x-2}$ als konstanten Faktor hinzusetzt!

(c) $\frac{d}{dx}(2x-3)^{27}=54(2x-3)^{26}$, $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1}{3}x-1}=\frac{1}{2\sqrt{3x-9}}$, $\frac{d}{dx}\ln(2x)=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$, andererseits $\frac{d}{dx}\ln(2x)=\frac{d}{dx}(\ln(2)+\ln(x))=\frac{d}{dx}\ln(x)=\frac{1}{x}$.

(d) $\frac{d}{dx}2^x$, $\frac{d}{dx}\log_3(x)$

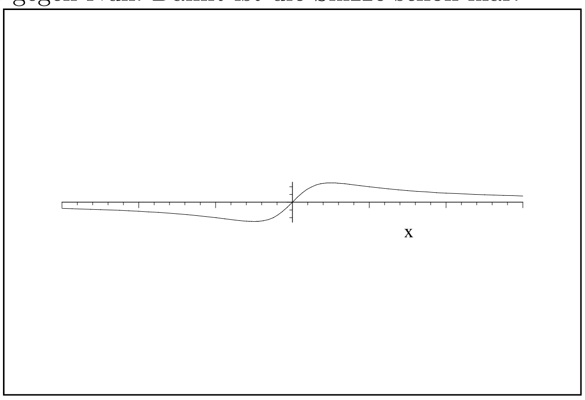
(e) $\frac{d}{dx}\frac{1}{2+\sin^2(x)}=\frac{-2\sin(x)\cos(x)}{(2+\sin^2(x))^2}$ - beachten Sie, dass ein Ausmultiplizieren des Nenners völlig fehl am Platze ist. Sehen Sie auch ein, dass die Sache sowohl mit Quaotientenregel als auch mit Kettenregel (für den letzten Aufbauschritt des Ausdrucks) zu produzieren ist.

(f)

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(Erweitern des Bruchs mit $\sqrt{x^2+1}$, um den Doppelbruch zu vermeiden!)

3. Wir überlegen: $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, ist eine ungerade Funktion - es tritt nicht etwa ein Pol auf, weil der Nenner stets größer als Null ist. Damit ist die Vorzeichenfrage klar: $f(x)>0$ für $x>0$, $f(x)<0$ für $x<0$, $f(0)=0$. Dominanz: Für $x\to\infty$ geht $f(x)$ gegen Null. Damit ist die Skizze schon klar:




Genauer gesagt wäre dies die einfachste denkbare Version, zu sichern bleibt mit der Ableitung noch, dass es jeweils nur einen Buckel gibt. Wir wissen jedoch bereits, dass es mindestens zwei (symmetrisch gelagerte) Extrema gibt und ebenfalls auf jeder Seite weiter außen noch einen Wendepunkt, zusätzlich einen Wendepunkt bei $x=0$. Quantitative Behandlung der Extrema und Wendepunkte:

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

also haben wir ein lokales Maximum in $x=1$, ein lokales Minimum in $x=-1$, keine weiteren lokalen Extrema, und diese beiden sind sogar global. (Da die graphische Überlegung oben zeigte, dass es *mindestens* diese geben muss, benötigen wir dazu keine zweite Ableitung. Aber für die quantitative Bestimmung der Wendepunkte wird die zweite Ableitung notwendig - beachten Sie: Hier sind alle nötigen Rechenschritte ganz ausführlich, nach der Devise 'Ausklammern und nicht Ausmultiplizieren, und Kürzen':

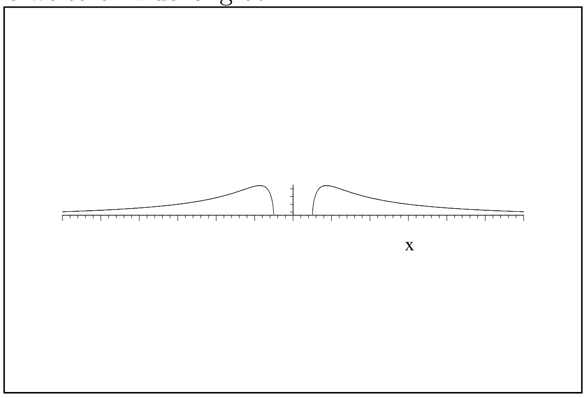
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{-2x\left(1+x^2\right)^2 - 2\cdot 2x\left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4} \\ &= \frac{2x\left(1+x^2\right)\left(-1-x^2-2+2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}. \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung hat also nur die Nullstellen $x = 0, \pm\sqrt{3}$, somit liegen die beiden fraglichen Wendepunkte bei $\pm\sqrt{3}$. Da es keine weiteren als die vom Graphischen her als notwendig erkannten gibt, sind wir fertig und benötigen nicht etwa eine dritte Ableitung!

4. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1}$ in deren maximalem reellen Definitionsbereich.

   (a) Der maximale reelle Definitionsbereich ist $]-\infty,-1] \cup [1,\infty[$, da $x^2 \geq 1$ sein muss.

   (b) Die Funktion ist gerade, die Werte gehen gegen Null für $x \to \pm\infty$, da der Nenner dominiert. (Vernachlässigen der additiven Konstanten, und höhere Potenz im Nenner.) Das Vorzeichen ist überall positiv, einzige Nullstellen bei $x = \pm 1$. Damit ist auf jeder Seite mindestens ein Maximum notwendig, weiter außen je ein Wendepunkt. Damit ist die grobe Skizze klar, jedenfalls die einfachste denkbare - wieder wird die erste Ableitung bestätigen, dass es keine weiteren Buckel gibt.




   Eine weitere Feinheit (im Computerbild nicht einmal besonders schön zu erkennen, aber von der ersten Ableitung her klar): Die Steigungen bei $-1, 1$ sind (einseitig): $-\infty, \infty$.

   (c) Wir haben $\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+1} = -x\frac{x^2-3}{\sqrt{x^2-1}(x^2+1)^2}$, also sind die einzigen Nullstellen der ersten Ableitung $x = \pm\sqrt{3}$, dort liegen also die Maxima, die sogar globale sind. Achtung: $x = 0$ ist nicht etwa eine weitere Nullstelle - dort ist der Ausdruck gar nicht definiert, und wäre er es, so wäre eine solche Stelle außerhalb des Definitionsbereichs von $f$ gar nicht in Betracht zu ziehen als Kandidat für einen Extremwert. Aber auch an den Stellen $x = \pm 1$ ist die Ableitung nicht definiert, sie hat dort je einen Pol! Zusammen mit den Vorzeichen sieht man das oben angegebene Steigungsresultat. Weiter sieht man, dass $f'(x) \to 0$ für $x \to \infty$ auch noch einmal am Rechenausdruck, was nach der Asymptotik in der Skizze natürlich so sein musste.

   (d) Es ist wohl klar, dass die zweite Ableitung hier noch weit mühsamer wird. Es kommt noch schlimmer. Nachdem man ausgerechnet hat:

$$f''(x) = \frac{2x^6 - 15x^4 + 12x^2 - 3}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\left(x^2+1\right)^3},$$

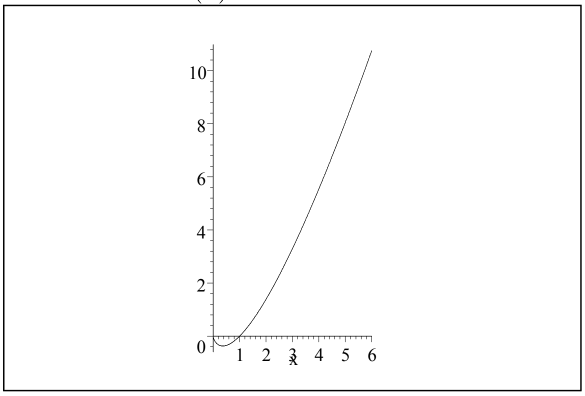
   sieht man, dass es gar keine Chance gibt, die Nullstellen auszurechnen, man kann nur graphisch und mit Näherungsverfahren feststellen: Das Zählerpolynom $2x^6 - 15x^4 + 12x^2 - 3$ hat im Definitionsbereich von $f$ tatsächlich nur zwei Nullstellen, dort liegen also die einzigen Wendepunkte (nach der Skizze musste es *mindestens* je einen auf jeder Seite geben!). Numerisch findet man die Stellen $x_{1,2} \approx 2.57$.

5. Zur Funktion $g(x) = x\ln(x)$: Maximaler reeller Definitionsbereich ist $]0,\infty[$. Vorzeichen: Negativ für $0 < x < 1$, positiv für $x > 1$, einzige Nullstelle $x = 1$. Die Werte gehen nach $\infty$ für $x \to \infty$, und zwar steiler als eine Gerade. Für $x \to 0$ hat man $g(x) \to 0$. Argument dafür: Wenn eine Zahlenfolge $(x_n)_n$ gegen Null geht, so ist $|x_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Wählen wir $\varepsilon = \frac{1}{e^M} = e^{-M}$, denken an eine frei wählbare Zahl $M > 0$, die beliebig groß ist. Nun haben wir $|x_n \ln(x_n)| \leq e^{-M}\left|\ln\left(e^{-M}\right)\right| = Me^{-M}$. Aber wir wissen (auch dies ist mit dem angekündigten Resultat zu erzielen), dass die Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ über jede Potenzfunktion dominiert für $x \to \infty$. Also ist $Me^{-M}$ so klein, wie wir wollen, wenn wir $M$ groß genug wählen. Es verbleibt die Frage, wo das notwendige Minimum im Bereich $]0,1]$ liegt, und wie das Steigungsverhalten für $x \to 0$ aussieht. Die Ableitung klärt das sofort:

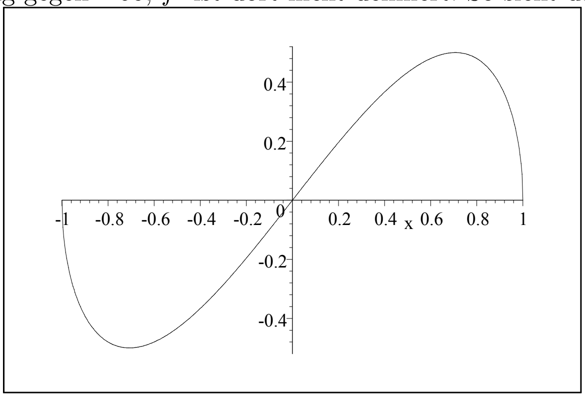
$$g'(x) = 1 + \ln(x).$$

Einzige Nullstelle ist $x = e^{-1}$. Somit liegt dort ein sogar globales Minimum vor. Ferner $g'(x) \to -\infty$ für $x \to 0$. (Verhalten des Logarithmusterms, die Konstante 1 spielt da keine Rolle). Schließlich $g'(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

(doch sehr langsam!). Der Graph sieht so aus:$x \ln(x)$




6. Zu $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ : Maximaler reeller Definitionsbereich ist $[-1, 1]$. Vorzeichen klar, ungerade Funktion, Nullstellen $x = 0, 1, -1$. Mindestens ein Maximum im Bereich $[0, 1]$, entsprechend Minimum auf der anderen Seite. Die Ableitung
$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$
lehrt: Die Extrema liegen in $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, der Nulldurchgang bei $x = 0$ findet statt mit Steigung 1, und an den Rändern $x = \pm 1$ geht die Steigung gegen $-\infty$, $f'$ ist dort nicht definiert. So sieht das Ganze aus:




7. Wir rechnen: Das Quadrat des Abstandes zwischen $Q$ und dem Geradenpunkt mit Ortsvektor $\vec{x}_g(\lambda)$ ist
$$f(\lambda) = (1-3\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + (-7-5\lambda)^2 = 51 + 66\lambda + 35\lambda^2,$$
und damit hat $f$ ein eindeutiges Minimum für die einzige Nullstelle von $f'(\lambda)$, das ist $70\lambda + 66 = 0$, also $\lambda = -\frac{33}{35}$, damit liegt der Punkt $\vec{x}_g\left(-\frac{33}{35}\right)$ der Geraden dem Punkt $Q$ am nächsten. Aber man sollte nun nicht etwa diesen Punkt ausrechnen und den Betrag des Differenzvektors ausrechnen, sondern man bildet $f\left(\frac{-33}{35}\right) = \frac{696}{35}$ und der gesuchte Abstand ist $\sqrt{\frac{696}{35}}$, etwa 4.46.